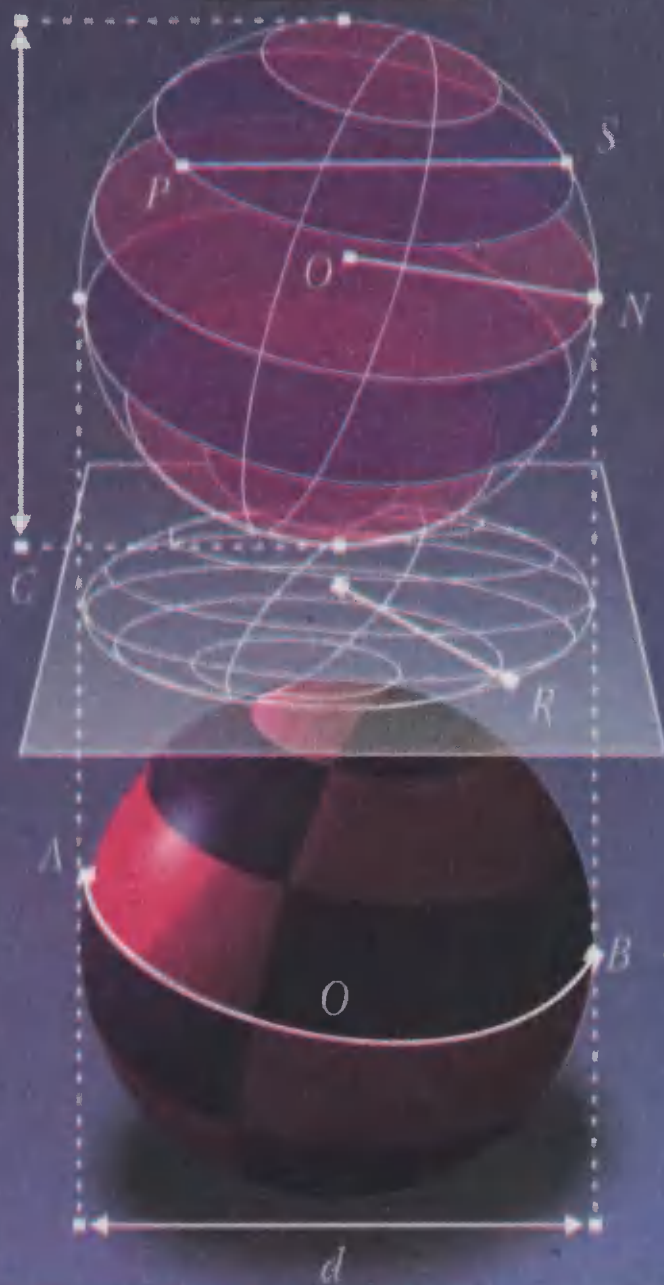


И. Ф. Шарыгин

ГЕОМЕТРИЯ

7-9

К Л А С С Ы



Д Р О Ф А

И. Ф. Шарыгин
ГЕОМЕТРИЯ



К Л А С С Ы

Учебник
для общеобразовательных
учебных заведений



Рекомендовано
Министерством общего и профессионального образования
Российской Федерации



Москва
Издательский дом «Дрофа»
1997

УДК 373.167.1:514

ББК 22.151я721


Ш26

Шарыгин И. Ф.

Ш26 Геометрия. 7—9 кл. — М.: Дрофа, 1997. — 352 с.: ил.

ISBN 5—7107—1324—4

Новый учебник по геометрии для общеобразовательных школ реализует авторскую, наглядно-эмпирическую концепцию построения школьного курса геометрии. Это выражается прежде всего в отказе от аксиоматического подхода. Аксиоматика, конечно, присутствует, но не выдвигается на первый план.

Больше внимания, по сравнению с традиционными учебниками, уделено методам решения геометрических задач. Система задач дифференцирована по уровням сложности, кроме того, в теоретической части разделы, отмеченные , предназначены для углубленной подготовки.

Учебник входит в Федеральный комплект учебников 1997/98 г.

УДК 373.167.1:514

ББК 22.151я721

Учебное издание

Шарыгин Игорь Федорович

ГЕОМЕТРИЯ

7—9 классы

Учебник для общеобразовательных учебных заведений

Ответственный редактор *М. Г. Циновская*

Редактор *Ж. И. Яковлева*

Оформление художника *А. В. Кузнецова*

Художники *В. А. Иванюк, Б. А. Гомон*

Художественный редактор *М. Г. Мицкевич*

Технический редактор *В. Ф. Козлова*

Компьютерная верстка *О. А. Молочков, Д. А. Дачевский*

Корректор *Г. И. Мосякина*



Изд. лиц. № 061622 от 23.09.92.

Подписано к печати 30.05.97. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага писчая. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Усл. печ. л. 22,0. Тираж 25 000 экз. Заказ № 6745.

Издательский дом «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

По всем вопросам приобретения продукции

Издательского дома «Дрофа» обращаться по адресу:

127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Тел.: (095) 289-03-25, 218-16-37, 289-03-66, 218-54-09

Отпечатано с готовых диапозитивов на Смоленском полиграфическом комбинате Государственного комитета Российской Федерации по печати.
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

ISBN 5—7107—1324—4

© «Дрофа», 1997

Чем математика отличается от других школьных предметов? Наверняка, любой школьник сумеет ответить на этот вопрос, указав немало важных отличий. Я же хочу обратить внимание на две особенности. С математикой приходится встречаться на протяжении всей школьной жизни. Во всех классах, от первого до последнего, бывают уроки математики. И этим математика отличается от любого другого школьного предмета, кроме ... физкультуры.

Вторая особенность состоит в том, что, начиная с некоторого момента, математика как бы «раздваивается» и в расписании уроков появляются ее разделы: алгебра и геометрия. Изучаются эти разделы на разных уроках, по разным учебникам, а иногда их даже ведут разные учителя.

Чем же геометрия выделяется среди других разделов математики? Прежде всего, геометрия, наверное, самая древняя наука. Более того, сам термин «математика» возник сравнительно недавно, так что ученые древности и отчасти средневековья, занимавшиеся в нашем понимании математикой, называли себя геометрами. Некоторые теоремы геометрии являются одними из древнейших памятников мировой культуры. Они старше самой Библии. Помните об этом, изучая геометрию. И если вы любите и интересуетесь историей, то должны неплохо знать и геометрию.

Однако далеко не все школьники испытывают большую любовь к математике. Некоторые не слишком хорошо выполняют арифметические действия, плохо разбираются в процентах, и вообще, пришли к выводу, что у них нет никаких математических способностей. Хочу их обрадовать:

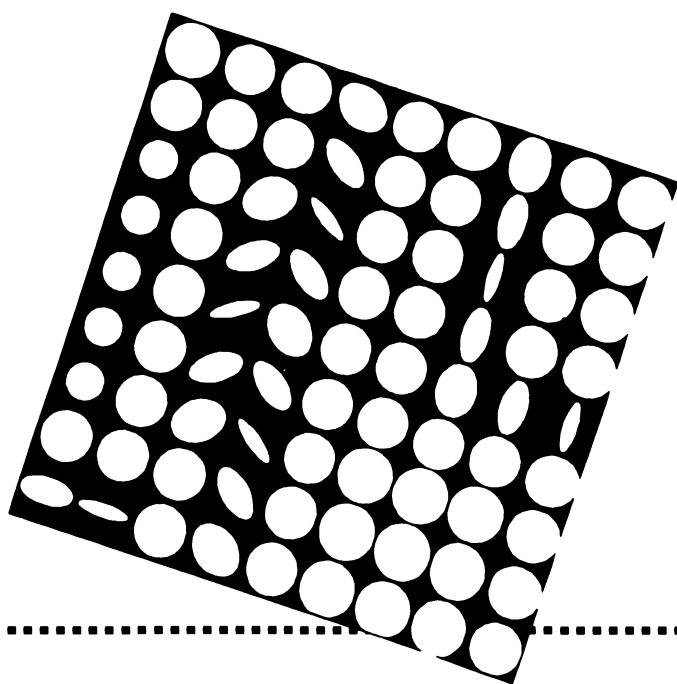
геометрия — это не совсем математика. Во всяком случае, это совсем не та математика, с которой до сих пор вам приходилось иметь дело. Геометрия — это предмет для тех, кому нравится фантазировать, рисовать и рассматривать картинки, кто умеет наблюдать, замечать и делать выводы.

Геометрия — необычайно важный и интересный предмет, и любой человек может найти в ней уголок по душе.

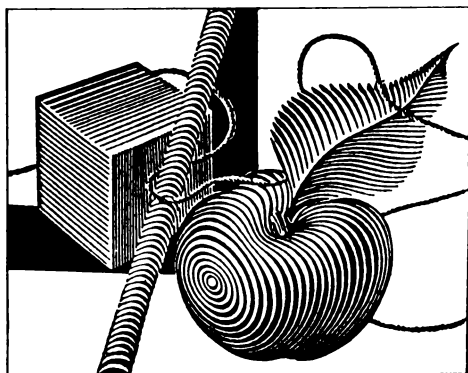
Один мудрец сказал: «Высшее проявление духа — это разум. Высшее проявление разума — это геометрия. Клетка геометрии — треугольник. Он так же неисчерпаем, как и вселенная. Окружность — душа геометрии. Познайте окружность, и вы не только познаете душу геометрии, но и возвысите душу свою».

Седьмой

класс



Чем занимается геометрия? Первые понятия геометрии



*Предмет, к изучению которого мы приступаем, называется **геометрия**. Но было бы неверным утверждать, что до сих пор вы ничего о ней не знали. Вам не раз приходилось встречаться с треугольниками и пирамидами, квадратами и кубами, окружностями и шарами. Не так много, но кое-что об этих телах и фигурах вы знаете, хорошо представляете себе, как они выглядят, и понимаете, что все они имеют отношение к геометрии.*

Утверждение, что мы приступаем к изучению геометрии, означает прежде всего, что в учебнике излагается систематический курс геометрии. Это, в свою очередь, значит, что мы постепенно, шаг за шагом будем строить геометрическую теорию, последовательно

доказывая все утверждения в соответствии с законами математики, выводя их из уже известных утверждений.

Прежде всего, что такое геометрия? Слово **геометрия** состоит из двух частей **гео** и **метрия** и в переводе с греческого языка означает **землемерие**.

Но уже давно геометрия вышла за узкие рамки, обозначенные этим буквальным пониманием. Если мы заглянем в любой энциклопедический словарь, то обнаружим очень большую статью, начинающуюся примерно так:

Геометрия — это раздел математики, изучающий пространственные формы и их отношения.

А что это означает? Что такое «пространственные формы» и чем состоят «их отношения»?

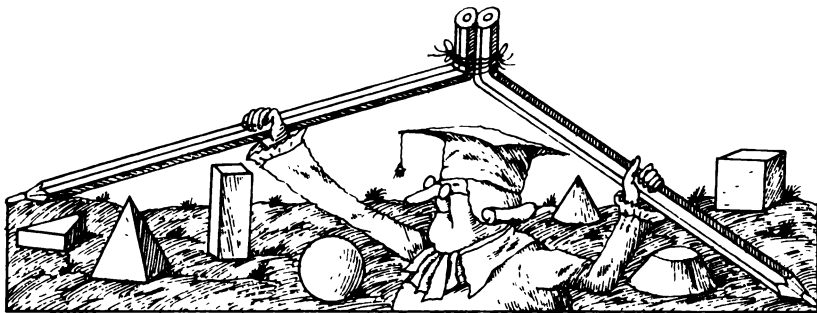
1.1. Геометрическое тело

Важнейшей пространственной формой является **геометрическое тело**, а одним из видов пространственных отношений — взаимное расположение геометрических тел.

Один из крупнейших математиков XX в. А. Пуанкаре сказал так: «Не будь в природе твердых тел, не было бы и геометрии».

Каждый из вас без труда может привести примеры различных тел, встречающихся в окружающем нас мире: жилой дом, булыжник, заводская труба, капля смолы и т. д.

Говоря «геометрическое тело», мы тем самым подчеркиваем, что нас не интересуют физические свойства тела: масса, цвет, материал и др., что рассматривать и изучать мы будем лишь его форму и размеры. Можно сказать, что мы рассматриваем ту часть пространства, которую соответствующее тело занимает.



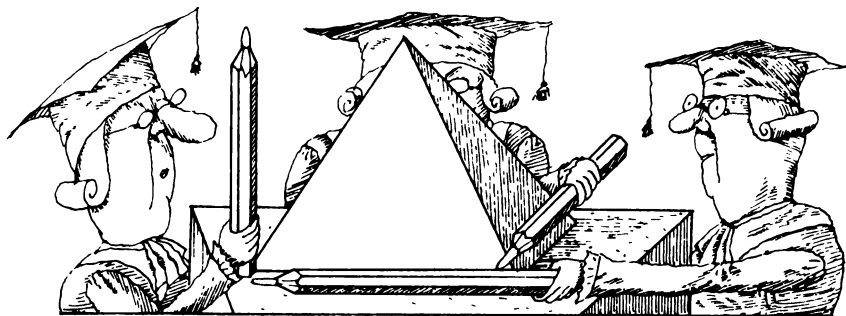
Если взглянуть на окружающие нас предметы как на геометрические тела, то можно, например, сказать, что дом и кирпич имеют одинаковую форму — форму параллелепипеда и отличаются лишь размерами, что заводская труба часто имеет форму цилиндра, а футбольный мяч — форму шара.

Конечно, реальный кирпич следует рассматривать как параллелепипед лишь приближенно. Проведав достаточно точные измерения, можно обнаружить небольшие отклонения от результатов, которые должны получиться, если бы кирпич был действительно параллелепипедом. Да и точность наших измерений ограничена, в то время как размеры параллелепипеда считаются заданными абсолютно точно. Однако для практических нужд все эти отклонения несутся и кирпич удобно рассматривать как параллелепипед.

Или рассмотрим нашу планету Земля. Часто говорят, что она имеет форму шара. Это удобно для многих практических и учебных целей. Однако с геометрической точки зрения это не совсем верно. Измерения, проведенные в XVII в., показали, что Земля имеет форму *геоида* — шара, немного сплюсненного вдоль одного из диаметров — оси Земли.

Геометрическое тело имеет *три измерения*. Условно мы их называем: *длина*, *ширина* и *высота* (или *толщина*). Да и само пространство, в котором мы живем, называется *трехмерным*. Наличие *трех* измерений является характерным признаком геометрического тела. Как это следует понимать?

У любого параллелепипеда нетрудно указать длину, ширину и высоту (рис. 1). Правда, что именно является длиной, шириной или высотой, зависит от договоренности. Это, например, может определяться положением параллелепипеда относительно поверхности земли, стола и др. Часто за длину мы принимаем наибольшее изме-



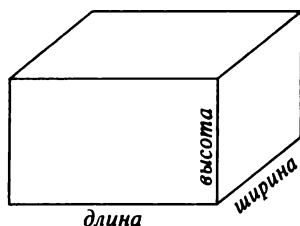


Рис. 1

рение, а под толщиной понимаем самое маленькое. Все это не так уж важно. Главное — измерений ровно три.

А как быть, допустим, с конусом или каким-то совсем замысловатым телом? Ведь здесь невозможно указать три измерения, как для параллелепипеда. Что здесь длина и ширина, а что — толщина?

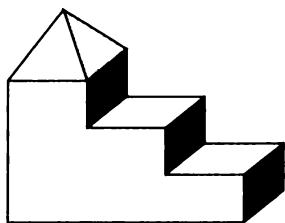
В общем случае утверждение о наличии у тела трех измерений означает лишь, что внутри него можно поместить параллелепипед, пусть очень небольшой, у которого, однако, все три измерения отличны от нуля.

А теперь решите несколько задач, заданий и вопросов. (Начиная с этого момента, в конце каждого параграфа или главы вам будут предлагаться упражнения этих трех видов.)

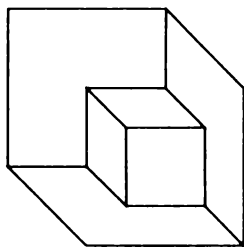
▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

1. Рассмотрим встречающиеся буквально на каждом шагу предметы: книгу, консервную банку, карандаш, электрическую лампочку... (Назовите еще несколько предметов самостоятельно.) Какие из известных вам геометрических тел по форме наиболее соответствуют перечисленным предметам? А быть может, их удобно рассматривать составленными из нескольких известных геометрических тел? Из каких? Дайте словесное описание этих тел.
2. Вспомните названия нескольких геометрических тел. Какие реальные тела соответствуют им по форме?
3. Нарисуйте известные вам геометрические тела: куб, различные пирамиды, цилиндр, конус, шар и др. Постарайтесь, чтобы изображаемые тела выглядели объемными. Какое из тел, на ваш взгляд, наиболее неудобно для изображения?

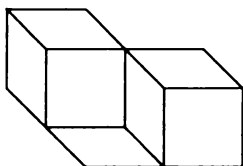
4. Придумайте какое-нибудь интересное тело. Опишите его словами другим ученикам, а они должны понять, что вы имеете в виду, и изобразить придуманное тело.
5. Рассмотрите внимательно рисунки 2, а – ж. Опишите, как устроены изображенные на них тела. Названия каких тел вам известны? Среди изображенных тел есть невозможные. Какие именно? Почему это так? Придумайте и нарисуйте какие-нибудь интересные тела, в том числе и невозможные.



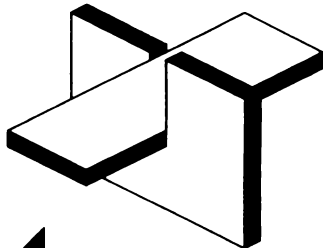
а)



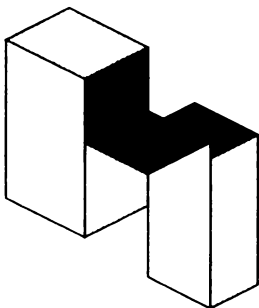
б)



в)



г)



д)



е)



ж)

Рис. 2

6. Придумайте пробку, с помощью которой можно заткнуть любое из изображенных на рисунке отверстий.

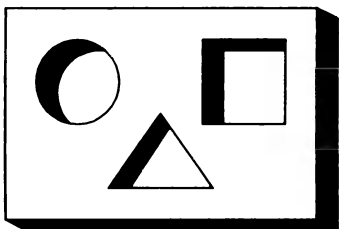


Рис. 3

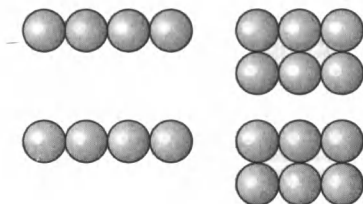


Рис. 4

7. Подумайте над следующей старинной головоломкой, которую иногда называют «египетская пирамидка». Имеется 20 одинаковых шариков, склеенных так, что получилось две «цепочки» по 4 шарика в каждой и два «прямоугольника» из 6 шариков со сторонами 2 и 3 шарика (рис. 4). Как сложить эти 4 набора, чтобы получилась составленная из шариков треугольная пирамида?

1.2. Поверхность

Всякое геометрическое тело имеет **поверхность**, представляющую собой границу (оболочку) этого тела.

Поверхность геометрического тела делит все пространство на две части: внутреннюю и внешнюю по отношению к этому телу. Чтобы попасть из любой точки, находящейся внутри тела, во внешнюю область, необходимо пересечь поверхность тела (рис. 5).

*Поверхность, ограничивающая шар, называется **сферой** (рис. 6).*

У всех других известных нам тел поверхности не имеют специальных названий.

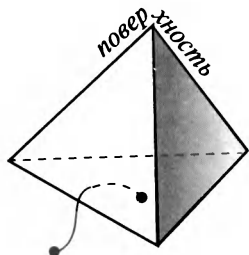


Рис. 5



Рис. 6

Однако не всякая поверхность является границей какого-либо тела. Главное здесь то, что поверхность, в отличие от тела, имеет лишь *два измерения*: длину и ширину. Иными словами, никакое тело, каким бы маленьким оно ни было, нельзя расположить так, чтобы оно целиком принадлежало поверхности.

Конечно, в реальной жизни, в природе мы не встретим предметов, не имеющих толщины. Поэтому понятие поверхности *абстрактно*, является *математической абстракцией*. (*Абстрактный* в переводе с латинского означает *отвлеченный*. Абстрактное понятие означает что-либо мысленное, непредметное, существующее лишь в нашем воображении. К абстрактным следует отнести такие понятия, как красота, душа, мысль, скорость и многие другие.)

Говоря, что лист бумаги или мыльная пленка являются поверхностями, мы подразумеваем, что их толщина ничтожно мала по сравнению с другими размерами. В жизни мы часто поступаем подобным образом. Например, говорим «фотография 9×12 », «кусоч ткани $2 \text{ м на } 3 \text{ м}$ ». И никому не приходит в голову указать еще и третий размер — толщину фотографии или ткани, хотя в отдельных случаях знание этой величины оказывается важным. Практически мы считаем их поверхностями и характеризуем двумя размерами — длиной и шириной.

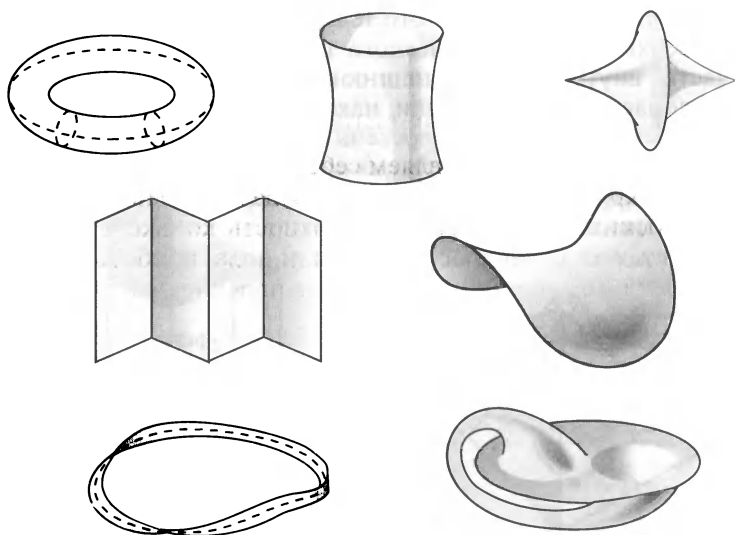
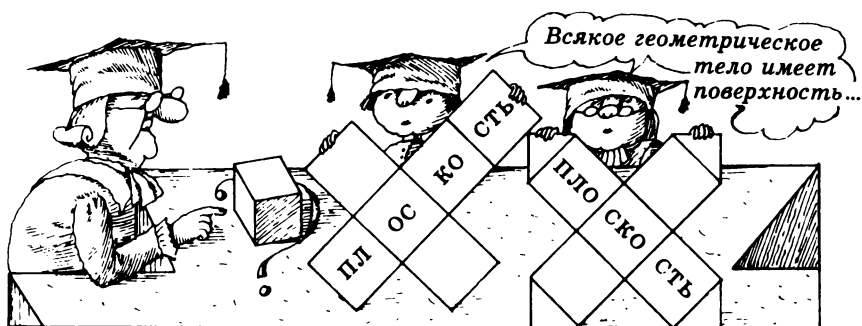


Рис. 7



Многообразен и удивителен мир поверхностей. На рисунках 7, а — ж изображены некоторые интересные математические поверхности. Стоит обратить внимание на поверхности, изображенные на рисунках 7, е, ж. Они обладают, на первый взгляд, невозможным свойством — у них одна сторона. Оказывается, двигаясь вдоль этих поверхностей и нигде не переходя через край, можно вернуться в ту же точку, но с другой (по отношению к этой точке) стороны. Убедитесь в этом самостоятельно. Поверхность, изображенная на рисунке 7, е, называется *листом Мёбиуса*. Она названа так по имени открывшего ее (вернее его) немецкого математика Мёбиуса, жившего в XIX в. Говорят, что свое открытие он сделал, увидев ленту, которую служанка по оплошности неверно сшила. Сколько раз подобные оплошности совершали служанки и не только они! Но никто до Мёбиуса не обращал внимания на удивительные свойства образовавшейся поверхности.

Среди всех поверхностей выделим одну — *плоскость*, свойства которой и будем в дальнейшем изучать.

Плоскость мы представляем себе бесконечной во всех направлениях. В окружающем нас мире без труда можно найти много примеров плоских поверхностей: поверхность конькобежного катка, оконное стекло, поверхность стола или пола, футбольное поле. Их практически можно рассматривать как плоские поверхности, части плоскости.

▲■● Задачи, задания, вопросы

-
1. Склейте из бумаги поверхности, ограничивающие куб, треугольную пирамиду, треугольную призму.

2. Поверхность куба разрезали и развернули на плоскость. Получились фигуры, изображенные на рисунках 8, а — в. Как из них получить поверхность куба?

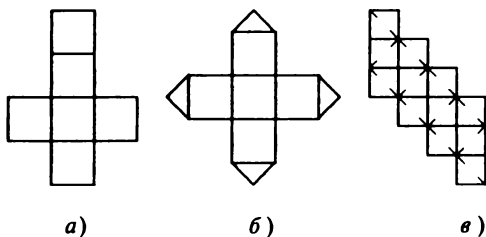


Рис. 8

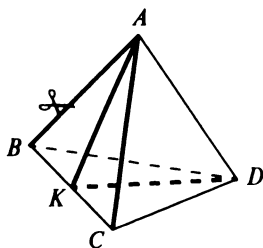


Рис. 9

3. Придумайте самостоятельно интересные развертки куба.
4. Что получится, если поверхность треугольной пирамиды, у которой все ребра равны, разрезать так, как показано на рисунке 9, и развернуть? (Разрезы идут по отрезкам BA , KA и KD .) Придумайте другие интересные развертки треугольной пирамиды.
5. Имеется квадратный лист бумаги. Сложите его так, чтобы получилась поверхность треугольной пирамиды.
6. Что получится, если лист Мёбиуса разрезать вдоль штриховой линии, указанной на рисунке 7, е? Можно ли одним разрезом разрезать лист Мёбиуса на две части, которые, однако, нельзя разъединить?
7. Художник изготовил для своей картины рамку. Он считает, что получившаяся рамка имеет прямоугольную форму. Каким образом это можно проверить? Достаточно ли убедиться в равенстве противоположных сторон? А если к равенству противоположных сторон добавить еще и равенство диагоналей? Можно ли теперь быть уверенным в том, что рамка действительно имеет прямоугольную форму?
8. Каким образом из листа бумаги можно изготовить поверхность цилиндра, конуса?
9. Рассмотрим известные вам тела: параллелепипед, призму, цилиндр, конус, шар. Как вы думаете, поверхности каких из этих тел можно разрезать таким образом, чтобы ее можно было положить на плоскость?
10. Имеется емкость для воды: ведро, таз и т. п. Как проверить, что дно емкости плоское?

1.3: Линия

При пересечении двух поверхностей получается *линия*.

Линией обычно является граница поверхности. (Если, конечно, у поверхности есть граница.)

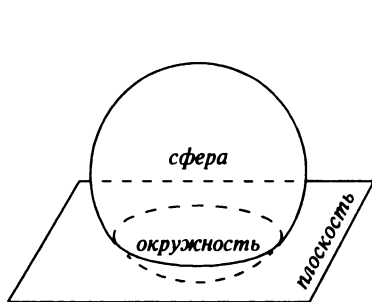


Рис. 10

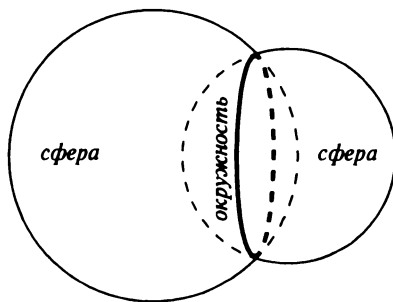
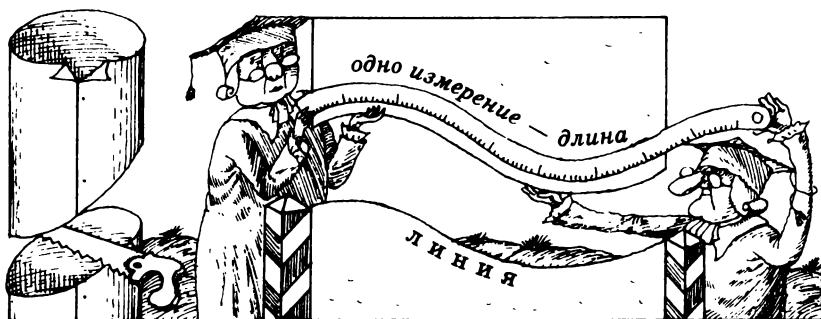


Рис. 11

Разрезав арбуз, мы получим на его поверхности линию, похожую на окружность. Она образуется при пересечении двух поверхностей: поверхности арбуза и плоскости, по которой проходит разрез.

При разрезании наискось поверхности цилиндра получаем овал, называемый *эллипсом*. Если же перед разрезанием обернуть поверхность цилиндра бумагой, а после разрезания этот лист развернуть, то в результате получим волнистую линию, которая называется *синусоидой*.

Следует запомнить, что при пересечении сферы с плоскостью (рис. 10) или же при пересечении двух сфер (рис. 11) образуется окружность. (Конечно, эти поверхности могут также касаться друг друга — иметь единственную общую точку и вовсе не иметь общих точек.)



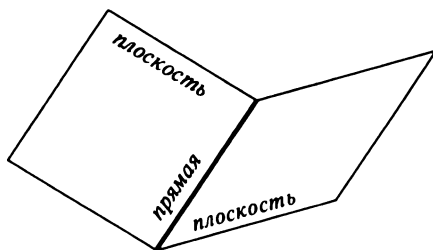


Рис. 12

Линия не имеет толщины и ширины. У нее лишь одно измерение — *длина*.

Как и поверхность, линия — понятие абстрактное.

В реальной жизни мы часто встречаемся с линиями, точнее, с тем, что удобно считать линией. Предмет или что-то иное, одно измерение которого явно преобладает над другими, мы считаем линией. Например, нить, волос, дорога, разделительная полоса на шоссе, государственная граница и т. п. Мы говорим «длина волоса», «длина дороги», «20 м веревки», т. е. ограничиваемся для характеристики предмета лишь одним измерением.

При пересечении двух плоскостей образуется *прямая линия* (рис. 12).

В геометрии (и не только в геометрии) прямая линия играет исключительную роль. Луч света представляет собой прямую линию. Натянутая нить — также прямая. Свободно падающее тело движется по прямой. Также по прямой движется тело, на которое не действуют никакие силы. В этом состоит *первый закон Ньютона*, с которым вы познакомитесь на уроках физики.

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

1. На поверхности каких известных вам геометрических тел можно проводить прямые линии или части прямых?
2. Соедините две точки прямой линией: а) на листе бумаги; б) на полу класса; в) на местности. (В пункте б) предложите практический способ построения прямой, в пункте в) — способ, с помощью которого можно отметить на местности точки, расположенные на одной прямой.)

3. Имеется кусок проволоки. Как проверить, является ли он отрезком прямой?
4. Как проверить, что имеющаяся у вас линейка в самом деле позволяет проводить прямые линии?
5. Почему образующаяся при сгибании листа бумаги линия является прямой?

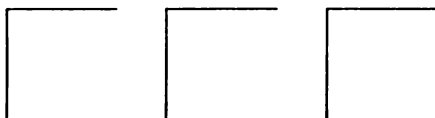


Рис. 13

6. Кусок проволоки изогнули в виде некоторой линии. На рисунке 13 показано, как выглядит этот кусок с трех различных точек зрения (спереди, сбоку и сверху). Каким образом изогнули этот кусок?

1.4. Точка

Древнегреческий геометр Евклид говорил, что «точка — это то, что не имеет частей». Мы можем добавить, что точка не имеет размеров.

Всякий очень маленький по сравнению с рассматриваемым окружением предмет мы считаем точкой (рис. 14). Так, точкой является отверстие, оставленное иглой в листе бумаги, жук на поверхности земли, город на географической карте, звезда на небе или наша планета в Солнечной системе.

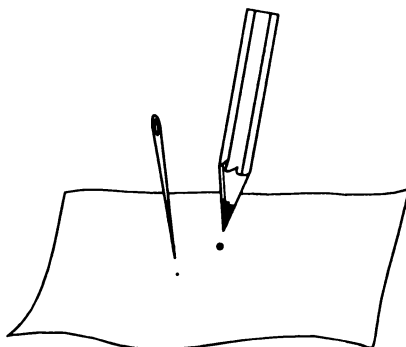


Рис. 14

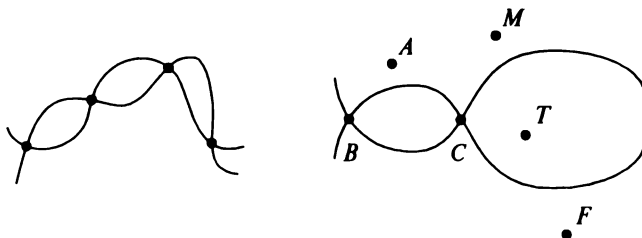


Рис. 15

При пересечении двух линий образуется точка, возможно, не одна. Любое геометрическое тело, поверхность, линия, любая геометрическая фигура состоит из точек, или, как говорят математики, представляет собой множество точек. В дальнейшем отдельные точки мы обычно будем обозначать заглавными латинскими буквами A, B, C, \dots (рис. 15).

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

1. Могут ли два геометрических тела иметь ровно одну общую точку? две общие точки? Приведите примеры.
2. На краю большой лесной поляны стоят 4 дерева. Как найти на поляне место пересечения прямых, которые попарно соединяют противоположные деревья?

1.5. От точки к телу

Итак, начав рассмотрение с вполне реальных тел, мы получили представление о поверхностях, линиях, точках — геометрических формах, не существующих в природе, представляющих собой математические абстракции.

А теперь пойдем с «другого конца». Начнем с точки (рис. 16). Можно считать, что точка — это некое место в пространстве, нечто, не имеющее размеров.

При движении точка будет описывать линию — траекторию движения точки. Кстати, часть примеров, иллюстрирующих понятие прямой линии в § 1.3, — примеры движения по прямой.

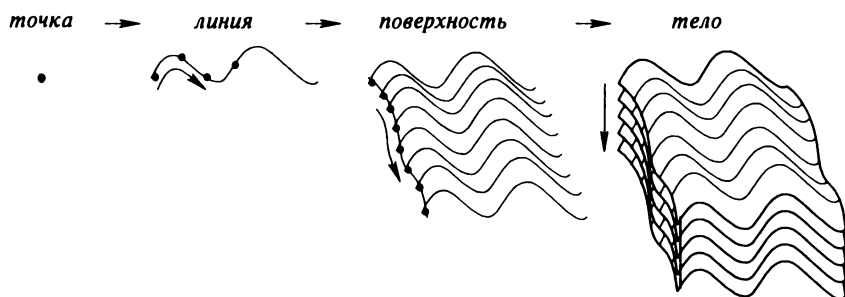


Рис.16

Когда мы при помощи линейки вычерчиваем прямую линию, то как раз получается, что эта прямая вычерчивается движущейся точкой — кончиком карандаша. То же имеет место при вычерчивании окружности с помощью циркуля.

Будем теперь перемещать в пространстве линию целиком. При этом в процессе движения сама линия может менять форму, деформироваться. Область, заметаемая при таком движении, будет поверхностью.

Так, плоскость можно получить при помощи движения прямой линии. Представьте себе лезвие рубанка, выстругивающего доску. Луч вращающегося маяка также может замечать плоскость или же коническую поверхность. Сферу можно получить в результате вращения окружности вокруг ее диаметра.

Все точки тела можно получить, перемещая в пространстве поверхность. Сферами с общим центром можно заполнить внутренность шара (конечно, надо добавить еще точку — центр шара); перемещая квадрат, можно заполнить куб и т. д.

Выводы

Подведем первые итоги.

Геометрическое тело — *часть пространства*; имеет три измерения, которые мы условно называем длиной, шириной и высотой (или толщиной).

Поверхность — *граница геометрического тела*; имеет два измерения — длину и ширину.

Линия *образуется при пересечении двух поверхностей*; имеет одно измерение — длину.

Точка *образуется при пересечении двух линий*; не имеет размеров.

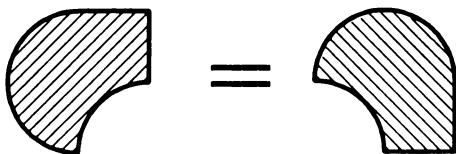


Рис. 17

С другой стороны:

Точка — «то, что не имеет частей»; не имеет размеров.

Линия получается при движении точки; имеет одно измерение — длину.

Поверхность заполняется или замещается при движении линии; имеет два измерения — длину и ширину.

Тело заполняется поверхностями; имеет три измерения — длину, ширину и высоту (или толщину).

Тело, поверхность, линия, точка являются основными **геометрическими формами**.

Мы также будем использовать понятие **геометрическая фигура**. Если геометрическое тело — это часть пространства, ограниченная поверхностью, то геометрическая фигура — это часть поверхности, ограниченная линией. Как и поверхность, фигура имеет два измерения.

Введем теперь еще одно очень важное понятие — понятие **геометрического равенства**.

Два геометрических тела, две поверхности, линии или фигуры называются **равными**, если их можно совместить друг с другом (рис. 17).

Равенство геометрических фигур будем обозначать привычным символом $=$.

Необходимо четко понимать, что хотя понятие геометрического равенства и звучит, и обозначается так же, как и числовое равенство, оно во многом от него отличается. Равенство двух геометрических фигур или тел или других геометрических объектов означает их «одинаковость» по форме и по размеру.

Замечание. В математической литературе обычно используется термин **конгруэнтность**, означающий **соответствие, совпадение**. Конгруэнтными являются фигуры, которые можно совместить друг с другом. Таким образом, введенное нами понятие геометрического равенства совпадает с математическим понятием конгруэнтность.

▲■● Задачи, задания, вопросы

1. Заведите специальную тетрадь, которую будем называть «Геометрический словарь». Запишите в тетрадь геометрические понятия и термины, которые вы узнали в этой главе, дайте короткие объяснения, проиллюстрируйте рисунками. Постарайтесь это сделать как можно красивее. Обращайтесь с тетрадкой аккуратно, она будет сопровождать вас в течение всех лет занятий геометрией.

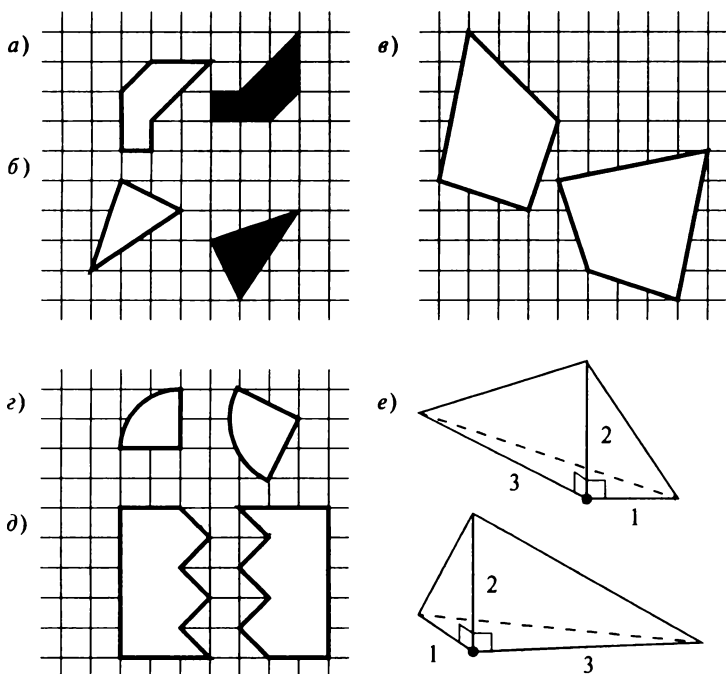
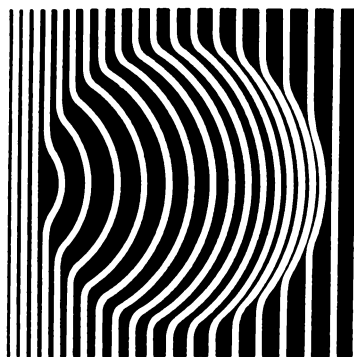


Рис. 18

2. Что означает слово «геометрия»? Чем занимается наука геометрия?
3. Назовите основные геометрические формы. Что такое геометрическое тело, поверхность, линия, точка?
4. Равны ли фигуры и тела, изображенные на рисунках 18, а — е?

Основные свойства плоскости



Именно с этой главы, по-существу, начинается систематический курс геометрии. Возможно, вначале он покажется не столь интересным, поскольку новых фактов почти не будет. Главное заключается в том, что все простые и известные геометрические факты мы постараемся изложить в строгой логической последовательности, иными словами, систематизировать их.

*Мы будем, в основном, рассматривать раздел геометрии, который называется **планиметрией** и изучает свойства плоскости, плоских форм и фигур.*

В этой главе мы познакомимся с некоторыми начальными понятиями планиметрии, обсудим важнейшие свойства плоскости, в пер-

вую очередь те, которые связаны с прямыми, частями прямых, их взаимным расположением на плоскости.

Начнем с простейшего — свойств прямой линии.

2.1. Геометрия прямой линии

Геометрия прямой линии (рис. 19) достаточно проста. Основные свойства прямой линии известны и понятны. Мы лишь напомним и аккуратно сформулируем эти свойства и некоторые понятия, относящиеся к прямой линии.

Любая точка, лежащая на прямой, делит эту прямую на две **полупрямые**. Каждая из этих полупрямых называется также **лучом** (рис. 20).

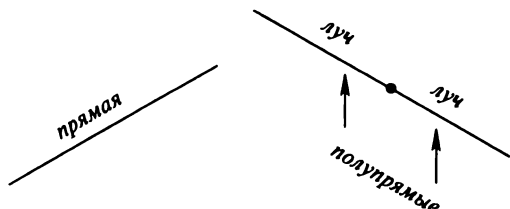


Рис. 19

Рис. 20



Рис. 21

Луч задается **началом** (граничная точка луча) и **направлением** (рис. 21).

Таким образом, каждая точка делит прямую на два луча, имеющие общее начало и противоположные направления.

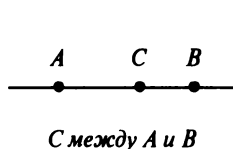


Рис. 22

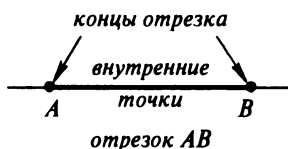


Рис. 23

Если на прямой взять любые три точки, то одна из них расположена *между* двумя другими (рис. 22).

Любые две точки на прямой ограничивают **отрезок прямой**. Точки, которые расположены между концами отрезка, являются **внутренними** точками отрезка.

Отрезок задается своими конечными или граничными точками. Например, отрезок AB (рис. 23).

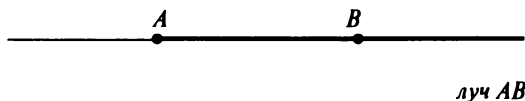


Рис. 24

Луч мы также будем обозначать через AB , при этом первая точка в этой записи (точка A) обозначает начало луча, вторая (точка B) — любая точка на луче (рис. 24).

Если имеется *единица длины*, то мы можем измерять *длину* любого *отрезка*. Что такое длина отрезка и как можно измерить отрезок, считаем известным. Отметим лишь несколько простых и очевидных свойств.

Длина отрезка выражается положительным числом. Понятно, что величина этого числа зависит от выбора единицы длины. Поэтому, говоря о длине отрезка, надо указывать, в каких единицах он измерен (рис. 25). В нашей стране используется метрическая система мер. В этой системе в качестве единиц длины используются сантиметры (см), метры (м), километры (км) и т. д.

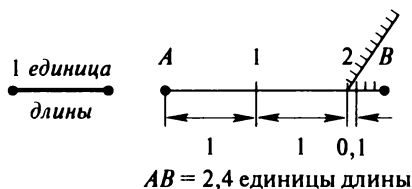


Рис. 25

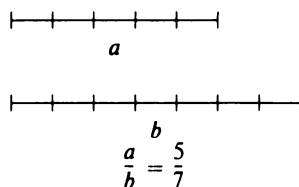


Рис. 26

Два отрезка являются равными, если они имеют равную длину, т. е. в одинаковых единицах измерения их длины выражаются равными числами.

Отношение длин любых двух отрезков не зависит от выбора единицы длины. Поэтому мы можем говорить об *отношении двух отрезков* (рис. 26). Например, если отношение двух отрезков равно двум, то это означает, что в первом отрезке укладывается ровно 2 отрезка, равных второму отрезку.

С помощью циркуля мы можем в любом месте на прямой откладывать отрезки, равные данному.

В дальнейшем запись AB будем понимать как обозначение самого отрезка, так и его длины.

$$AC = AB + BC$$

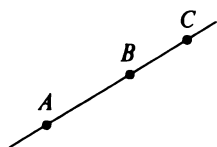


Рис. 27

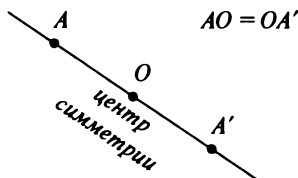


Рис. 28

Если точка B лежит между точками A и C , то длина отрезка AC равна сумме длин отрезков AB и BC .

Это свойство можно записать (рис. 27) в виде равенства

$$AC = AB + BC.$$

Будем говорить, что точки A и A' **симметричны** относительно точки O , если O — середина отрезка AA' . При этом точка O называется **центром симметрии** точек A и A' (рис. 28).

Любая точка O на прямой не только делит эту прямую на два противоположно направленных луча, но и является центром ее симметрии, т. е. какую бы точку M мы на прямой ни взяли, на этой же прямой найдется точка M' , симметричная ей относительно точки O .

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

Начиная с этого параграфа, мы будем выделять некоторые задачи. Буква «в» сопровождает важные задачи. Эти задачи надо непременно решить и хорошо усвоить либо метод решения, либо сообщаемый в них факт. Буква «п» означает, что задача полезная, буква «т» — трудная. Этими буквами обозначены задачи, предназначенные тем, кто хочет лучше овладеть теорией геометрии и научиться решать трудные задачи.

1. Можно ли разбить прямую на два отрезка и два луча?
2. На прямой даны точки A, B, C . Известно, что $AB = 1,5$, $AC = 2,5$, $BC = 4$. Какая из трех точек лежит между двумя другими?
3. На прямой даны точки A и B . Сколько на этой прямой найдется точек M таких, что: а) $AM = BM$; б) $2AM = MB$?

4(в). Длина отрезка AB равна 3. Внутри отрезка взята точка M . Найдите длину отрезка BM , если:

- а) $AM = 2BM$; б) $2AM = 3BM$; в) $AM : BM = 1 : 5$;
 г) $AM : BM = 3 : 4$; д) $AM - BM = 2$; е) $3AM + 2BM = 7$;
 ж) $AM^2 - BM^2 = 3$.

5(п). Как изменится ответ для пунктов а)–г) предыдущей задачи, если точка M — некоторая точка прямой AB , не обязательно внутри AB ?

6(в). Длина отрезка AB равна 3. На отрезке взяты точки P и K так, что $AP = 1,7$, $BK = 1,8$. Найдите длину отрезка PK .

7. На прямой находятся точки A , B и C . Какие значения может принимать длина отрезка AC , если: а) $AB = 4,2$; $BC = 5,7$; б) $AB = 2,8$; $BC = 2,1$?

8. На прямой расположены точки A , B , C и D . Найдите длину отрезка с концами в серединах AB и CD , если:

- а) $AB = 1,2$, $BC = 1,7$, $CD = 2,2$, $AD = 5,1$;
 б) $AC = 1,1$, $CB = 1,3$, $BD = 3,5$, $AD = 5,9$;
 в) $AC = 5$, $BD = 7$.

9. На прямой отмечено несколько точек. Сколько всего отрезков и сколько лучей, для обозначения которых используются эти точки, если отмечено: а) две точки — A и B ; б) три точки — A , B и C ; в) четыре точки — A , B , C и D ; г) пять точек — A , B , C , D и E ?

10(п). На прямой находятся точки A , B , C и D . Какие значения может принимать длина отрезка AD , если:

- а) $AB = 1,2$, $BC = 1,4$, $CD = 1,7$;
 б) $AB = 2,1$, $BC = 1,8$, $CD = 2,3$;
 в) $AC = 1,3$, $BC = 2,4$, $BD = 3$?

11(в). Длина отрезка AB равна 4. На отрезке взяты точки M и K так, что $AM : MK : KB = 1 : 2 : 3$ (запись означает, что $AM : MK = 1 : 2$, а $MK : KB = 2 : 3$). Найдите длину отрезка MK .

12(т). Чему может равняться длина отрезка MK , если в предыдущей задаче точки M и K могут располагаться где угодно на прямой AB ?

13. На прямой отмечены два отрезка длиной 1,3 и 1,7. Постройте отрезок, равный: а) 3; б) 0,4; в) 0,9; г) 1.

14. На прямой находятся точки A , B , C и D , причем $AB = 1,2$, $BC = 2,1$, $CD = 0,8$. Найдите длину отрезка CA , если известно, что луч DA содержит точку B , но не содержит точки C .
15. Отрезок AB равен 1,5. На луче AB взята точка C , а на луче BA точка D так, что $AC = 0,7$, $BD = 2,1$. Найдите CD .
16. На прямой взяты три точки: A , B и C . Укажите все точки M этой прямой такие, что M ближе к B , чем к A , и в то же время M ближе к B , чем к C . Рассмотрите два случая расположения точек A , B и C : B — между A и C ; B — вне отрезка AC .
17. Даны точки A и B . Укажите все точки M на отрезке AB , для которых:
- а) $\frac{AM}{BM} > 1$; б) $\frac{AM}{BM} \geq 2$; в) $\frac{AM}{BM} \leq \frac{1}{3}$;
 г) $1 < \frac{AM}{BM} < 2$; д) $2 \leq \frac{AM}{BM} < 3$; е) $\frac{1}{2} \leq \frac{AM}{BM} \leq 2$.
- 18(т). Решите задачу 17, если рассматриваются точки на всей прямой AB .
- 19(т). Точка B лежит на отрезке AC , $AB = 2$, $BC = 1$. Укажите на прямой AB все точки M , для которых $AM + BM = CM$.
- 20(п). Две точки движутся по прямой в одном направлении. На какую величину переместится середина отрезка, определяемого этими точками, если одна точка переместится на 1, а другая — на 3? Каков будет ответ, если точки движутся в различных направлениях?
- 21(т). На прямой последовательно расположены точки A , B , C и D , причем $AB = BC = 1$, $CD = 2$. Точка M лежит на BC и делит отрезки BC и AD в одном и том же отношении ($BM : MC = AM : MD$). Найдите это отношение.
- 22(т). На прямой взяты точки A , B , C и D . Укажите множество точек M на прямой, для которых $AM + BM = CM + DM$, если:
- а) точки следуют в порядке A , B , C и D и $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$;
 б) точки следуют в порядке A , C , B и D и $AB = CD = 4$, $BC = 3$.
- 23(т). На отрезке длины 3 расположены отрезки длиной 1,7; 1,6; 1,5. Докажите, что все эти отрезки содержат общий отрезок, длина которого не меньше 0,1.
- 24(п). Кузнечик делает 5 прыжков по дороге, причем длина каждого прыжка, начиная со второго, в 2 раза больше преды-

душего, а направления прыжков произвольны. Докажите, что кузнечик не сможет вернуться в исходную точку.

25(в). На прямой даны точки A , B и C , причем $AB = 1$, $BC = 2$, $AC = 3$. Изобразите на прямой точки A , B и C , а также точки, симметричные любой из них относительно каждой из двух других. (Например, симметричные A относительно B и C .)

26(п). На прямой даны две точки: A и B , причем $AB = 1$. Пусть M — некоторая точка прямой, точка M_1 симметрична M относительно A , точка M_2 симметрична M_1 относительно B . Изобразите точки M , M_1 , M_2 , если: а) M — середина AB ; б) $AM = 3$, $BM = 2$; в) $AM = 0,3$, $BM = 1,3$. Для всех случаев найдите длину отрезка MM_2 .

27(п). Точка M симметрично отображается относительно точки A , а полученная точка симметрично отображается относительно точки B . В результате этих двух симметрий M переходит в M' . Докажите, что $MM' = 2AB$. (Выражение «точка M симметрично отображается относительно точки A » означает, что M переходит в точку M_1 такую, что A — середина MM_1 .)

28. Докажите, что если середины отрезков AB и CD , расположенных на одной прямой, совпадают, то $AC = BD$.

29(в). Пусть прямая является числовой осью. Изобразите на ней множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам:

а) $1 \leq x \leq 2,5$; б) $x < 10$; в) $-1 < x \leq 1$; г) $1,2 < x < 4,1$ и $x < 3$. Что это за множества?

30(в). Точка A имеет на числовой оси координату x_1 , а точка B — координату x_2 . Найдите координату точки A' , симметричной A относительно B , если:

а) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$;

б) $x_1 = 4,7$, $x_2 = 1$;

в) $x_1 = -1$, $x_2 = 1,1$;

г) $x_1 = 3$, $x_2 = -22,2$.

31(в). Найдите координату точки, являющейся центром симметрии, переводящей точку $A(x_1)$ в точку $A'(x_2)$, если:

а) $x_1 = 1,2$, $x_2 = -3$;

б) $x_1 = -17$, $x_2 = 113$;

в) $x_1 = 0,03$, $x_2 = -0,02$.

32(п). В какую точку перейдет точка $A(x_0)$ при симметрии, переводящей $B(x_1)$ в $B'(x_2)$, если:

а) $x_0 = 0, x_1 = 1; x_2 = 2;$

б) $x_0 = 1,2, x_1 = -1, x_2 = 1,5;$

в) $x_0 = -10, x_1 = -11, x_2 = 12?$

33. Длина ветки равна 2 м. В начале ветки сидит червяк. За первую минуту он проползает 1 м, за следующую — $1/2$ м, в течение следующей — $1/4$ м и так далее, т. е. за каждую следующую минуту он проползает в два раза меньше, чем за предыдущую. Доберется ли когда-нибудь червяк до конца ветки?

34(т). Три дома A, B и C расположены на одной прямой в указанном порядке. На этой же прямой надо вырыть колодец. Каждая семья, проживающая в этих домах, будет один раз в день брать из колодца воду. Где надо расположить колодец, чтобы общий (суммарный) путь был как можно меньше, если в каждом из домов проживает одна семья? Как изменится ответ, если в доме A живет одна семья, в доме B — две семьи, а в доме C — три семьи?

35(п). На прямой расположены 17 отрезков так, что они полностью закрывают отрезок длиной 12. Докажите, что длина хотя бы одного отрезка больше, чем 0,7.

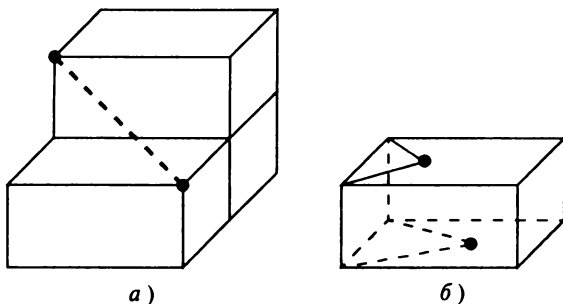


Рис. 29

36(т). Для того чтобы линейкой с делениями измерить диагональ кирпича, можно поступить следующим образом. Взять три кирпича, расположить их так, как показано на рисунке 29, а. Теперь нужный отрезок можно легко измерить.

А как измерить отрезок, соединяющий две отмеченные точки данного кирпича, расположенные на его противоположных гранях (рис. 29, б)?

2.2. Основные свойства прямой на плоскости

Плоскость как геометрическая форма характеризуется определенными свойствами и, в первую очередь, свойствами, связанными с прямой линией. И, наоборот, многие важные свойства прямой связаны с плоскостью.

Первое основное свойство плоскости

Свойство 1.

Через любые две точки плоскости можно провести прямую линию и притом только одну.

Прямую, проходящую через точки A и B , мы будем называть прямой AB (рис. 30). Как видите, обозначение AB используется в четырех случаях: оно может обозначать и отрезок, и длину отрезка, и луч, и прямую. Но никакой путаницы в наши рассуждения это не внесет, просто в каждом случае будем указывать, о чем идет речь.

Расстояние на плоскости между двумя точками A и B равно длине отрезка AB . Кратчайший путь из A в B — это путь по прямой, соединяющей эти точки.

Из первого свойства плоскости можно легко получить важную теорему. (Здесь впервые появляются такие понятия, как теорема и доказательство. Позднее мы объясним, что они означают. Тем, кто хочет узнать их смысл поскорее, советуем прочитать начало § 4.5.)

Теорема 2.1.

Любые две различные прямые, принадлежащие плоскости, пересекаются не более чем в одной точке.

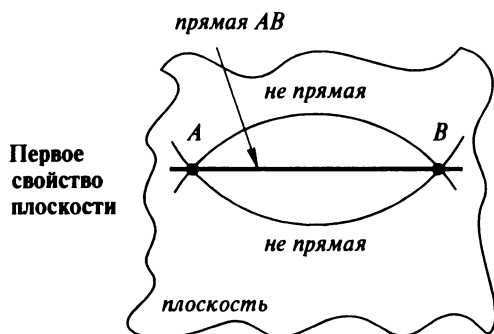


Рис. 30

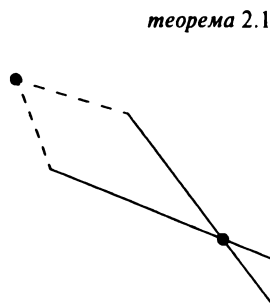


Рис. 31

Доказательство. Доказательство этой теоремы весьма просто. Если мы предположим, что число общих точек у двух прямых более одной (рис. 31), то согласно первому свойству прямые должны совпасть. А это противоречит условию, что данные прямые различны. ▼

Итак, теорема, по сути, утверждает, что любые две различные прямые, принадлежащие плоскости, либо имеют одну общую точку, либо ни одной.

Параллельные прямые

Две прямые на плоскости, не имеющие общих точек, называются параллельными.

На самом деле первое свойство и теорема 2.1 не являются чисто планиметрическими фактами. Они справедливы и для пространства.

А вот следующее свойство характерно именно для плоскости.

Второе основное свойство плоскости

Свойство 2.

Любая прямая плоскости делит эту плоскость на две части — две полуплоскости.

Что означает это свойство?

Пусть в плоскости проведена некоторая прямая, которую мы обозначим буквой a . Любая точка A , не лежащая на этой прямой, находится в одной из двух образовавшихся полуплоскостей. При этом, если точки A и B расположены в разных полуплоскостях, то отрезок AB пересекает a . Если же точки A и B находятся в одной полуплоскости, то отрезок AB не пересекает a (рис. 32).

Это же можно выразить несколько иначе.

Две точки плоскости A и B , не лежащие на прямой a этой плоскости, располагаются в разных или в одной полуплоскости относительно прямой a в зависимости от того, будет ли отрезок AB пересекаться с прямой a или нет.

Центральная и осевая симметрии плоскости

Как и для прямой, любая точка плоскости является центром симметрии плоскости. Для того чтобы построить точку, симметричную точке A относительно точки O , надо провести через A и O прямую и

Второе
свойство
плоскости

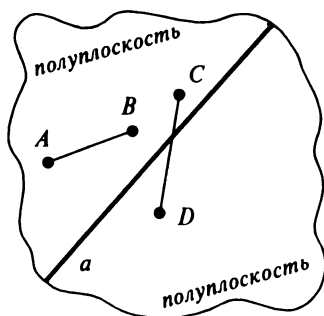


Рис. 32

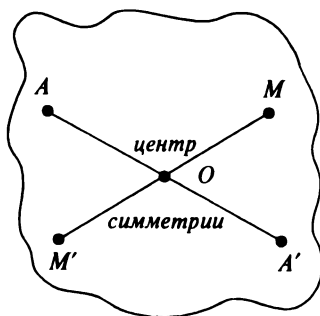


Рис. 33

на этой прямой по уже известному правилу построить точку A' , симметричную A относительно O (рис. 33).

Но кроме центральной, на плоскости существует еще один вид симметрии — **осевая симметрия**, являющаяся характерным свойством плоскости.

Третье основное свойство плоскости

Свойство 3.

Любая прямая плоскости является осью симметрии плоскости.

Что это означает?

Как мы знаем, прямая — это линия пересечения двух плоскостей. Отсюда следует, что при перегибании листа бумаги, представляющего собой модель плоскости, образуется прямая линия. Это станет яснее, если немного развести части листа, получившиеся при его перегибании. Тогда мы увидим, что линия сгиба — это линия пересечения двух плоскостей.

Если точки A и A' совпадут в результате перегибания листа бумаги, то будем говорить, что A и A' **симметричны** относительно образующейся при перегибании листа прямой a , или что они переходят друг в друга при симметрии относительно a (рис. 34, a — $в$).

Все точки самой прямой a при этом остаются неподвижными, переходят сами в себя.

Две фигуры или линии плоскости являются симметричными относительно прямой a , если для каждой точки одной фигуры найдется симметричная относительно a точка другой фигуры.

Понятно, что симметричные фигуры равны.

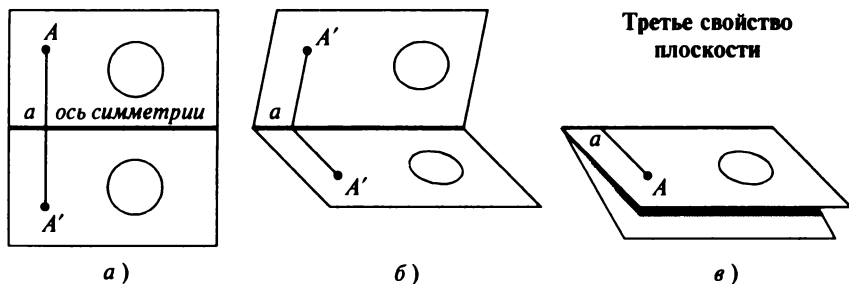


Рис. 34

Если же в результате симметрии относительно прямой a фигура не меняется, а только меняются местами некоторые пары точек, то будем говорить, что прямая a является *осью симметрии* этой фигуры.

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

-
1. На сколько частей могут разделить плоскость две прямые?
 2. На плоскости проведены три прямые, не проходящие через одну точку и не параллельные друг другу. На сколько частей оказалась разделенной плоскость? На какие-то части при этом оказалась разделенной и каждая прямая. Сколько всего образовалось отрезков и лучей (рассматриваются лучи, не содержащие точек пересечения прямых)?
 - 3(п). На сколько частей может быть разделена плоскость четырьмя прямыми? Перечислите все случаи. Считается известным, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и вторую.
 - 4(п). Каким образом плоскость может быть разделена прямыми линиями на 5 частей?
 - 5(в). Два брата отправились в лес по грибы. Лес пересекает дорога. Пока братья ходили по лесу, они неоднократно переходили через дорогу, причем число переходов, сделанных старшим братом, на 3 превышает это число для младшего брата. Как вы думаете, по одну сторону дороги или по разные оказались братья, когда вышли из леса?

6. Нарисуйте фигуры, имеющие ровно одну, две, три и четыре оси симметрии.

7(в). Нарисуйте на плоскости две пересекающиеся прямые a и b . Отметьте какую-то точку A на плоскости. Изобразите точку A_1 , симметричную точке A относительно прямой a , затем точку A_2 , симметричную A относительно прямой b , далее точку A_3 , симметричную A_1 относительно b , и, наконец, точку A_4 , симметричную A_2 относительно a . Рассмотрите несколько случаев расположения точки A .

8(п). При симметрии относительно прямой a точка A перешла в точку A' . Докажите, что прямая a делит отрезок AA' пополам.

9(п). При симметрии относительно прямой a точки A и B перешли соответственно в точки A' и B' . Докажите, что прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке, лежащей на прямой a . (Считаем, что прямая AB пересекает прямую a .)

10(п). На плоскости отметили 1995 точек. В результате симметрии относительно некоторой прямой a каждая из этих точек перешла в какую-то из отмеченных. Докажите, что прямая a проходит хотя бы через одну из отмеченных точек.

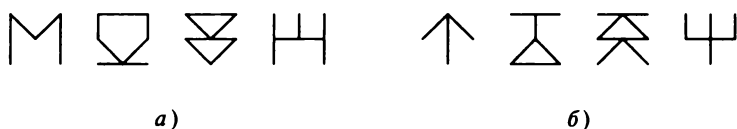


Рис. 35

11(п). Понятие осевой симметрии поможет вам решить следующую задачу. Предложите правило, по которому образована каждая из последовательностей символов, изображенных на рисунке 35, и продолжите каждую из них.

12. На прямой мы можем задать центральную симметрию. На плоскости есть два вида симметрии: центральная и осевая. А какие виды симметрии возможны в пространстве?

2.3. Плоские углы

Определение угла. Развернутый угол.

Измерение углов

*Углом мы будем называть часть плоскости, заключенную между двумя лучами этой плоскости, имеющими общее начало. Точки, лежащие в этой части плоскости, будем называть **внутренними точками** угла.*

*Лучи, образующие угол, называются **сторонами** угла, а их общее начало — **вершиной** угла.*

Данное определение угла не указывает, какую из двух частей плоскости, образовавшихся при проведении на плоскости двух лучей с общим началом, следует отнести к самому углу, а какую нет.

Договоримся, что обычно мы будем относить к углу «меньшую» из двух образовавшихся частей. Из этого правила, однако, в некоторых случаях будем делать исключения. Эти случаи мы будем четко оговаривать, а причина самих исключений в каждом конкретном случае будет достаточно понятной.

Углы мы будем обозначать знаком \angle . Обозначение $\angle AOB$ — это обозначение угла с вершиной в точке O и сторонами — лучами OA и OB (рис. 36). На этом рисунке A и B — точки на сторонах угла.

*Угол, стороны которого лежат на одной прямой, будем называть **развернутым**.*

Наиболее распространенной мерой углов является *градусная мера*. С этой мерой вы уже знакомы, поэтому лишь коротко напомним о ней.

Простейшим инструментом измерения градусной меры угла служит транспортир. Совместив вершину угла с точкой O на транспортире и направив одну из его сторон по прямолинейной границе транспортира, мы увидим значение величины угла в точке пересечения его второй стороны со шкалой, указанной на транспортире.

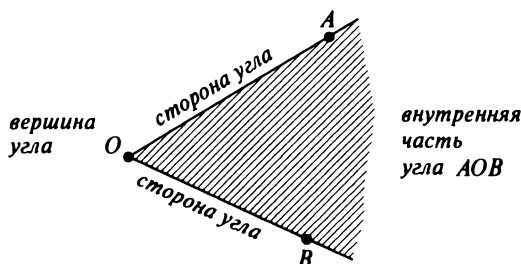
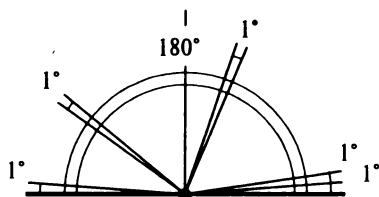
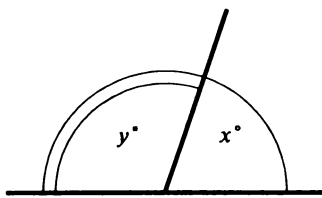


Рис. 36



развернутый угол

Рис. 37



смежные углы

Рис. 38

Величина развернутого угла равна 180 градусам, иными словами, угол в 1 градус (обозначается 1°) есть $1/180$ развернутого угла (рис. 37). Это означает, что если мы приложим друг к другу, как на рисунке 37, 180 углов по 1° каждый, то в результате получим развернутый угол.

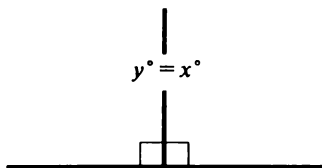
Рассмотрим какой-нибудь угол. Пусть одна его сторона неподвижна, а другая вращается вокруг вершины. Будем считать, что в начальном положении стороны угла совпадают, что соответствует углу 0° , а в конечном положении стороны образуют развернутый угол, величина которого равна 180° . Тогда любой угол, величина которого равна заданному числу градусов, при этом вращении появится лишь однажды.

Два угла называются **смежными**, если одна сторона у них общая, а две другие стороны образуют прямую линию.

Из определения градусной меры следует, что сумма величин градусных мер смежных углов равна 180° . На рисунке 38 $x^\circ + y^\circ = 180^\circ$.

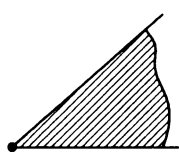
Если угол равен углу, смежному с ним, то такой угол называется **прямым**. Величина прямого угла равна 90° (рис. 39).

Углы, меньшие 90° , называются **острыми** (рис. 40, а), углы от 90° до 180° — **тупыми** (рис. 40, б); угол в 90° , как мы уже знаем, называется **прямым**.

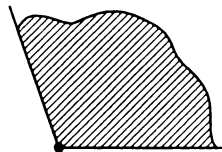


прямой угол

Рис. 39

острый
угол

а)

тупой
угол

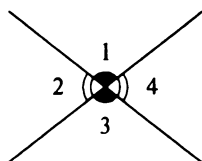
б)

Рис. 40

Вертикальные углы. Угол между прямыми

При пересечении двух прямых плоскость делится на четыре части, четыре угла. Эти четыре угла можно разбить на две пары. В каждую пару будут входить углы, не имеющие общей стороны.

Два угла, полученные при пересечении двух прямых, стороны которых являются дополнительными лучами этих прямых, называются **вертикальными**.



вертикальные
углы
 $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 3$
 $\sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 4$

$$\begin{array}{r} \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 180^\circ \\ \sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 = 180^\circ \\ \hline \sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 \end{array}$$

Рис. 41

На рисунке 41 вертикальными являются углы 1 и 3, а также 2 и 4.

Теорема 2.2.

Вертикальные углы равны.

Доказательство. Докажем, например, что на рисунке 42 равны углы 1 и 3. Эти углы являются смежными для угла 2. Каждый из них дополняет до 180° угол 2, а это значит, что углы 1 и 3 равны. ▼

Понятно, что из четырех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, хотя бы одна пара вертикальных углов не превосходит 90° . Величину каждого из таких углов мы и примем за величину угла между прямыми. Иными словами, *величина угла между двумя прямыми равна величине наименьшего из образовавшихся при их пересечении углов* (см. рис. 42).

Так, на рисунке 42 угол между прямыми равен углу 1 (или углу 3).

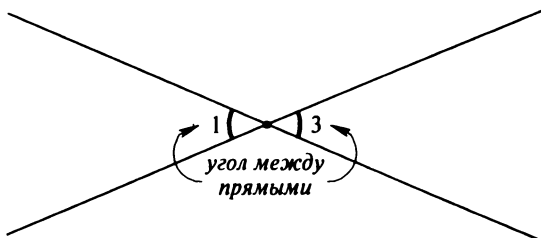


Рис. 42

Перпендикулярные прямые

Две прямые называются **перпендикулярными**, если все четыре угла, образовавшиеся при их пересечении, являются прямыми, т. е. равны 90° (рис. 43).

Справедлива следующая теорема.

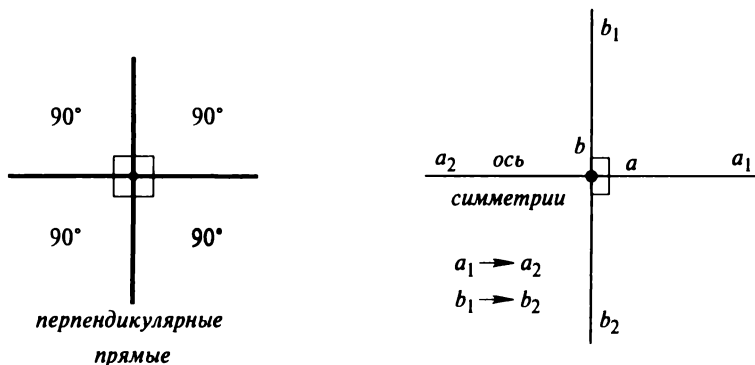
Теорема 2.3.

Если две прямые, лежащие в плоскости, перпендикулярны, то при симметрии относительно одной из них вторая прямая переходит сама в себя.

Доказательство. Из определения симметрии следует, что любая фигура при симметрии переходит в равную ей фигуру. Значит, и угол переходит в равный угол. Обозначим рассматриваемые прямые через a и b . Рассмотрим любой из углов, образованных при их пересечении. Сторонами этого угла являются лучи прямых a_1 и b_1 (рис. 44). Этот угол по условию равен 90° . В результате симметрии относительно a этот угол перейдет в равный ему угол. Но при этом сторона, лежащая на прямой a (луч a_1), останется на месте. Значит, другая сторона (луч b_1) перейдет в свое продолжение — другой луч той же прямой b (луч b_2). ▼

Теорема 2.3 означает, что при симметрии относительно любой из двух перпендикулярных прямых каждая из этих прямых переходит сама в себя.

Теперь можно доказать еще одну важную теорему.



Теорема 2.4.

Через любую точку плоскости проходит единственная прямая, перпендикулярная данной прямой.

Итак, даны некоторая прямая a и точка A на плоскости. Мы должны доказать, что через A можно провести единственную прямую, перпендикулярную a .

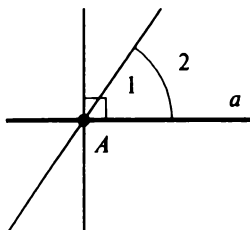
Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Точка A лежит на прямой a (рис. 45). Этот случай вполне очевиден. Ведь в каждой из двух полуплоскостей, соответствующих a , существует лишь один луч, образующий прямые углы с обеими полупрямыми, на которые точка A разбивает прямую a . Эти два луча лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой a .

Кстати, при доказательстве теоремы 2.3 мы опирались на этот факт.

2. Рассмотрим теперь случай, когда точка A расположена вне прямой (рис. 46). Обозначим через A' точку, симметричную A относительно a . Как мы уже знаем из теоремы 2.3, прямая, перпендикулярная a , в результате симметрии относительно a переходит сама в себя. Это означает, что если она проходила через A , то должна проходить и через A' . Следовательно, эта прямая является единственной. ▼

Из теоремы 2.4 следует, что две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, не могут пересечься (так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой), а значит, являются параллельными (рис. 47). Итак, мы доказали, что параллельные прямые в самом деле существуют.



$$\angle 2 < \angle 1$$

Рис. 45

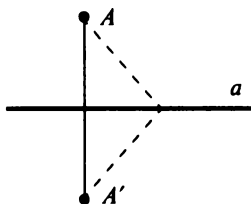


Рис. 46



Рис. 47

Теорема 2.4 подсказывает также и способ построения прямой, перпендикулярной данной, проходящей через точку, расположенную вне данной прямой. Если точка A расположена вне прямой a , то, построив сначала точку A' , симметричную A относительно a , и проведя прямую AA' , мы построим нужный перпендикуляр к a , проходящий через точку A .

Биссектриса угла

Последнее связанное с углом понятие, которое мы рассмотрим в этом параграфе, — это понятие биссектрисы.

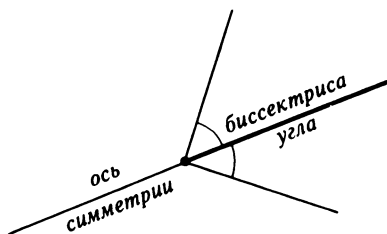


Рис. 48

*Луч с началом в вершине данного угла, лежащий внутри этого угла и делящий его на два равных угла, называется **биссектрисой** этого угла.*

Из определения биссектрисы следует, что прямая, на которой лежит биссектриса, является осью симметрии угла (рис. 48).

▲■● Задачи, задания, вопросы

1. Проверьте свой глазомер. Проведите на листе бумаги луч и постройте только с помощью линейки углы величины 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° , 105° , 120° , 135° , 150° , 165° , одной из сторон которых будет этот луч. С помощью транспортира проверьте точность сделанного «на глаз» построения.
- 2(в). Чему равен угол, если известно, что он на 40° больше угла, с ним смежного?
- 3(в). Чему равен угол, если известно, что он в пять раз меньше угла, с ним смежного?

- 4(п).** Какой из двух углов больше и на сколько, если известно, что сумма первого угла с углом, смежным со вторым, равна 200° ?
- 5(в).** На плоскости проведены две пересекающиеся прямые. Один из четырех образовавшихся углов равен 92° . Чему равен угол между прямыми?
- 6.** Три пересекающиеся в одной точке прямые делят плоскость на 6 углов. Два из этих углов равны 28° и 36° . Чему равны остальные углы? Чему равны углы между парами прямых?
- 7.** Четыре пересекающиеся в одной точке прямые делят плоскость на 8 углов. Три из этих углов равны 52° , 94° и 16° . Чему равны остальные углы? Чему равны углы между парами прямых?
- 8.** Какое наибольшее число лучей можно провести через данную точку плоскости, чтобы все углы, сторонами которых они являются, были тупыми?
- 9.** Какое наименьшее число лучей с началом в одной точке можно провести на плоскости, чтобы все углы, ограниченные соседними лучами, были острыми? (Любая точка плоскости должна принадлежать какому-то углу.)
- 10.** На плоскости проведены 4 попарно пересекающиеся прямые. Точки их пересечения обозначены, как на рисунке 49. Рассмотрим углы: $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$, $\angle DBC$, $\angle DAC$, $\angle DBE$, $\angle DEC$, $\angle BED$, $\angle CEF$, $\angle CFE$, $\angle CFD$. Какие из этих обозначений соответствуют одному и тому же углу? Какие углы являются вертикальными? Какие смежными?

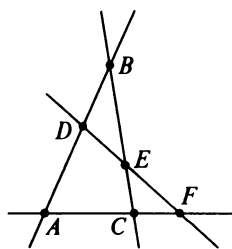


Рис. 49

- 11(в).** Через вершину угла α проведена прямая, перпендикулярная его биссектрисе. Какие углы образует эта прямая со сторонами угла?
- 12(в).** На плоскости проведены две пересекающиеся прямые. Докажите, что биссектрисы четырех образовавшихся углов лежат на двух перпендикулярных прямых.

13. Угол AOB равен 40° , а угол BOC равен 80° . Чему равен угол между биссектрисами углов AOB и BOC ?
- 14(п). Докажите, что если один из трех лучей OM , OA и OB расположен внутри угла, образованного двумя другими лучами, то угол между биссектрисами углов MOA и MOB равен половине угла AOB .
- 15(в). На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся под углом 30° в точке O . Пусть A — некоторая точка плоскости, A_1 — точка, симметричная A относительно одной из этих прямых, A_2 — точка, симметричная A относительно другой прямой. Чему равен угол A_1OA_2 ? (Рассмотрите различные случаи расположения точки A .)
- 16(т). На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся в точке O . Пусть A — некоторая точка плоскости, точки A_1 и A_2 симметричны A относительно данных прямых. Докажите, что угол A_1OA_2 в два раза больше угла между прямыми.
- 17(пт). На плоскости проведены две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O . Последовательно отражая точку A относительно одной из этих прямых, а затем полученную точку относительно другой, получим точку A_1 . Докажите, что точки A и A_1 симметричны относительно точки O .
- 18(п). Используя результат предыдущей задачи, докажите, что при центральной симметрии любая фигура переходит в равную ей фигуру.
- 19(п). Докажите, что в результате симметрии относительно точки, не лежащей на прямой, прямая переходит в параллельную прямую.
- 20(т). На плоскости проведены две прямые a и b , пересекающиеся в точке A ; пусть O — некоторая точка плоскости. Прямые a_1 и b_1 симметричны a и b соответственно относительно точки O . Пусть теперь A_1 — точка пересечения прямых a_1 и b_1 , B — точка пересечения прямых a и b_1 , B_1 — точка пересечения прямых a_1 и b . Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.
- 21(п). Дана прямая a и точка A вне ее. Докажите, что через A можно провести прямую, параллельную a .

22(т). Из точки O на плоскости выходят 4 луча, следующих друг за другом по часовой стрелке: OA , OB , OC и OD . Известно, что сумма углов AOB и COD равна 180° . Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.

23. На бумаге проведены две пересекающиеся прямые, но точка их пересечения недоступна (в этом месте на бумаге оказалась дырка). Предложите способ, с помощью которого можно было бы измерить угол между этими прямыми.

2.4. Плоские кривые, многоугольники, окружность

Плоские кривые, ломаные

Плоскую линию, которую можно изобразить на листе бумаги, не отрывая карандаша от листа, будем называть плоской кривой или просто кривой.

Кривая может быть: конечной и бесконечной, замкнутой и незамкнутой, самопересекающейся и несамопересекающейся. Все эти названия говорят сами за себя и вы легко сможете определить, к какому виду относится та или иная кривая (рис. 50).

Например, прямая, хотя это и звучит немного странно, является частным случаем кривой, причем кривой, бесконечной в обе стороны. А отрезок прямой — пример конечной кривой. И прямая, и отрезок — незамкнутые и несамопересекающиеся кривые. Окружность — это пример конечной, замкнутой, несамопересекающейся кривой.



Рис. 50



Рис. 51



Рис. 52

Если кривая состоит из конечного числа отрезков прямых линий, то она называется **ломаной** (рис. 51).

Концы отрезков — **вершины** ломаной, сами отрезки — **звенья**, или **стороны**, ломаной.

Любая замкнутая кривая, не пересекающаяся сама с собой, ограничивает плоскую фигуру и делит плоскость на две части — **внутреннюю** и **внешнюю** по отношению к этой фигуре (рис. 52).

При этом, если точка *A* принадлежит внутренней области, а точка *B* — внешней, то, двигаясь из *A* и *B* по любой кривой, мы пересечем данную замкнутую кривую **нечетное** число раз. Это понятно, ведь при каждом пересечении мы переходим из внутренней области во внешнюю или обратно и сами эти переходы чередуются. При одном пересечении мы перешли из внутренней во внешнюю область, после двух — вернулись обратно, после трех — вновь попадаем во внешнюю область и т. д.

Многоугольники

Замкнутая ломаная, не имеющая самопересечений, ограничивает многоугольник (рис. 53).

Звенья этой ломаной называются **сторонами** многоугольника.

Если число сторон многоугольника известно, то вместо слова «много» ставится соответствующее число. Так, получаем: **треугольник**, **пятиугольник**, **стоугольник** и даже **тысячедевятьсотдевяносто-семиугольник**.

Отрезки, соединяющие две несоседние вершины многоугольника, называются диагоналями многоугольника (рис. 54).

Сумма длин всех сторон данного многоугольника называется периметром многоугольника.

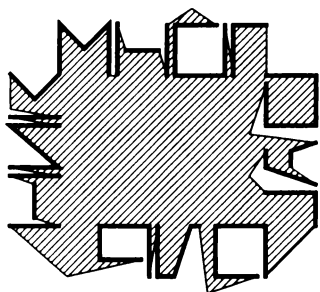


Рис. 53

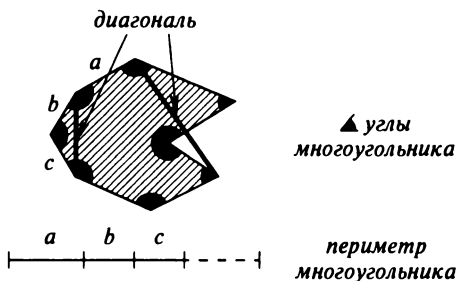


Рис. 54

Угол многоугольника задается его вершиной и лучами, которые идут по выходящим из этой вершины сторонам. При этом мы допускаем, чтобы углы многоугольника превышали 180° .

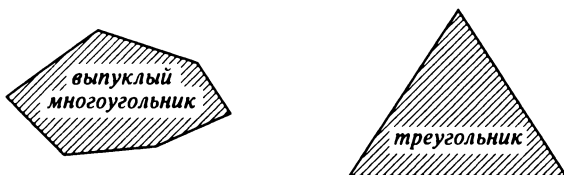


Рис. 55

Если все углы многоугольника меньше 180° , то этот многоугольник называется **выпуклым** (рис. 55). В этом учебнике в основном будут изучаться свойства выпуклых многоугольников.

Легко видеть, что любой треугольник является выпуклым.

Окружность и круг

Окружность — это замкнутая плоская кривая, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от данной точки O на данное расстояние.

При этом точка O называется **центром** окружности, а расстояние от O до точки окружности — ее **радиусом** (рис. 56).

Радиусом мы будем называть также любой отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности.

Итак, окружность — это множество или совокупность точек плоскости, обладающих определенным свойством. Это свойство за-

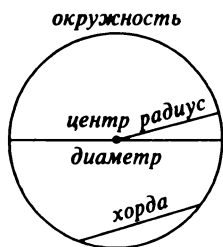


Рис. 56

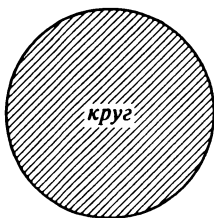


Рис. 57

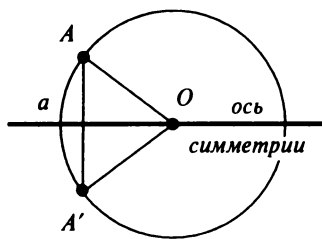


Рис. 58

ключается в постоянстве расстояния до заданной точки. Наше определение как бы подтверждает, что кривая, изображаемая с помощью циркуля, в самом деле является окружностью.

*Фигура, ограниченная окружностью, называется **кругом*** (рис. 57).

*Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой*** (см. рис. 56).

Вообще, отрезок, соединяющий две точки любой кривой, является хордой этой кривой.

*Хорда, проходящая через центр окружности, — **диаметр** окружности* (см. рис. 56).

Окружность и круг обладают многими поистине замечательными свойствами. В некотором смысле, это самые симметричные линия и фигура. У окружности и круга есть центр и бесконечно много осей симметрии.

Теорема 2.5.

Любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии.

Утверждение этой теоремы очевидно. Мы докажем ее по той лишь причине, что важные факты (а этот факт очень важен!) полезно формулировать в виде теорем, а теоремы положено доказывать.

Доказательство. По определению окружность состоит из всех точек плоскости, удаленных на одно и то же расстояние от ее центра. Проведем через центр окружности — точку O — произвольную прямую a . Пусть A — некоторая точка окружности (рис. 58).

Если A лежит на прямой a , то в результате симметрии относительно a точка A останется на месте.

Если же A не принадлежит прямой a , то в результате симметрии она перейдет в некоторую точку A' , а отрезок OA — в отрезок OA' . Согласно свойству симметрии $OA = OA'$, а значит, и точка A' при-

надлежит окружности. Но при этой симметрии точка A' , в свою очередь, перейдет в A . Короче говоря, при симметрии относительно прямой a точки A и A' , лежащие на окружности, просто поменяются местами. Из этого следует, что вся окружность перейдет сама в себя. ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

-
1. В скольких точках прямая может пересечь границу: а) треугольника; б) четырехугольника? (Считаем, что прямая не проходит через вершины.)
 2. Какие фигуры могут образоваться при пересечении: а) двух треугольников; б) двух выпуклых четырехугольников?
 - 3(в). Найдите периметр треугольника со сторонами:

а) 3, 5, 7;	б) 0,1, 100,1, 100,01;	в) 7,3, 5,4, 12,6;
г) $\frac{3}{7}, \frac{7}{11}, \frac{11}{13}$;	д) $\frac{2}{3}, \frac{2}{7}, \frac{22}{23}$.	
 - 4(в). В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 9$. На стороне CA взята точка M так, что $CM : MA = 5 : 7$. Какой из треугольников, CMB или AMB , имеет больший периметр и на сколько?
 5. Стороны треугольника равны 4, 7 и 9. Через вершину треугольника, противоположную меньшей стороне, проведена прямая, делящая его периметр пополам. В каком отношении эта прямая делит меньшую сторону треугольника?
 6. Периметр четырехугольника равен 118. Одна из его диагоналей делит четырехугольник на два треугольника с периметрами 77 и 83. Чему равна эта диагональ?
 - 7(т). Какое наименьшее число сторон может иметь многоугольник, две несоседние стороны которого лежат на одной прямой?
 - 8(т). Может ли при пересечении двух четырехугольников образоваться: а) шестиугольник; б) восьмиугольник; в) десятиугольник; г) четыре четырехугольника?

- 9(т). Возможно ли, чтобы все стороны десятиугольника располагались на пяти прямых?
10. Имеет ли смысл понятие «между» для трех точек, расположенных на окружности?
- 11(п). Ученик нарисовал замкнутую кривую без самопересечений, ограничивающую весьма сложную фигуру. От рисунка остался лишь небольшой клочок бумаги (рис. 59), на котором отмечены несколько точек. Где расположены точки B , C и D , во внутренней или во внешней области соответствующей фигуры, если известно, что точка A принадлежит внутренней области?

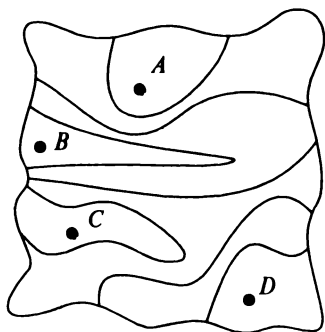


Рис. 59

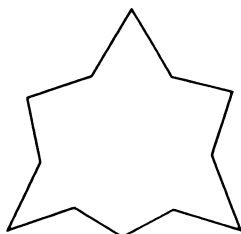


Рис. 60

12. Три черепахи A , B и C ползут по дороге:
 «Я ползу первой», — с гордостью заявляет A .
 «Слава Богу, я — не последняя», — утверждает B .
 «Главное, что я обогнала A », — размышляет C .
 Как вы можете это объяснить?
13. Комната имеет форму многоугольника, изображенного на рисунке 60. Укажите точки, в которых можно расположить источник света, чтобы он осветил всю комнату. Как называется фигура, заполняемая этими точками?
- 14(т). Придумайте комнату, имеющую вид многоугольника такой формы, чтобы ее нельзя было всю осветить одной лампой, но можно двумя.
- 15(т). Придумайте комнату такой формы, чтобы в ней можно было указать точку, из которой ни одна из стен не видна полностью.

- 16(в).** Возможен ли треугольник с двумя прямыми углами?
- 17(п).** На листе бумаги изображен четырехугольник. Как можно проверить, имеет ли он центр симметрии?
- 18.** Сколько всего диагоналей имеет шестиугольник, семиугольник, стоугольник?
- 19(т).** Может ли многоугольник иметь ровно 10 диагоналей? 20 диагоналей? 30 диагоналей?
- 20(т).** Возможно ли, чтобы у пятиугольника какие-то три диагонали пересекались в одной точке?
- 21.** В выпуклом пятиугольнике проведены все диагонали. На какие многоугольники оказался разделенным этот пятиугольник?
- 22(т).** На плоскости проведены четыре прямые, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько многоугольников при этом образовалось? Какие это многоугольники?
- Проведем еще пятую прямую, не параллельную ни одной из уже проведенных. Пусть эта пятая прямая проведена так, что все точки пересечения предыдущих прямых располагаются по одну сторону от нее. Подсчитайте, сколько и каких многоугольников образовалось. Окрасьте все получившиеся на плоскости области в два цвета так, чтобы любые две соседние были окрашены в разный цвет.
- Начнем перемещать пятую прямую параллельно самой себе и проследим, как при этом будут меняться число и вид получающихся многоугольников. Как надо изменять окраску в два цвета, чтобы всякий раз соседние области оставались окрашенными в разные цвета? Сделайте соответствующие рисунки.
- 23.** Нарисуйте произвольный треугольник и отметьте точку O . Постройте треугольник, симметричный изображенному относительно этой точки.
- 24.** Выполните предыдущее задание, взяв вместо треугольника четырехугольник, затем окружность.
- 25.** Даны две окружности разных радиусов и с разными центрами. Постройте прямую, являющуюся осью симметрии обеих окружностей.

- 26(т).** Внутри треугольника дана точка O . Постройте на сторонах этого треугольника две точки A и B так, чтобы отрезок AB содержал точку O и делился этой точкой пополам.
- 27(т).** Изобразите с помощью циркуля окружность и отметьте в круге любую точку A . Как провести через A хорду окружности, для которой A является серединой?
- 28(т).** На плоскости отмечены 4 точки (рис. 61). В каждой точке находится прожектор, освещающий угол в 90° . Как направить каждый из прожекторов, чтобы вся плоскость была освещена?
- 29(пт).** Докажите, что многоугольник не может иметь два центра симметрии.
- 30(т).** Многоугольник имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом 60° . Какое наименьшее число сторон может иметь этот многоугольник? Можно ли утверждать, что у него есть по крайней мере еще одна ось симметрии?
- 31.** Какие многоугольники могут получиться при пересечении треугольной пирамиды с плоскостью?
- 32.** Дана треугольная пирамида, на ребрах которой отмечены три точки (рис. 62). Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через отмеченные точки.

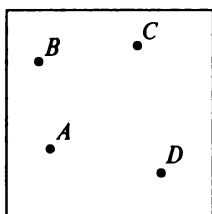


Рис. 61

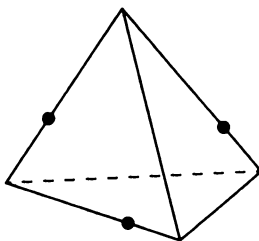


Рис. 62

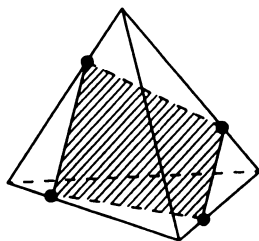
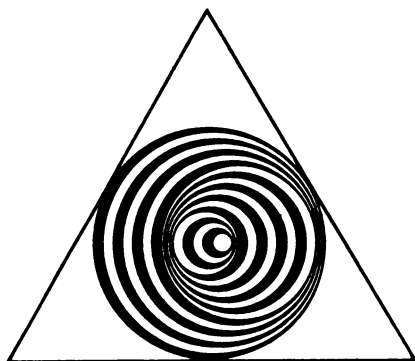


Рис. 63

- 33.** Ученик изобразил треугольную пирамиду и сечение ее плоскостью (рис. 63). Как вы думаете, возможно ли такое сечение?

Треугольник и окружность. Начальные сведения



Треугольник и окружность являются важнейшими фигурами планиметрии, и поэтому мы в первую очередь будем изучать свойства этих фигур. С ними связаны многие методы, используемые при решении различных геометрических задач. Любой многоугольник может быть разделен на треугольники, а изучение свойств этого многоугольника сводится к изучению свойств составляющих его треугольников. Окружность — единственная замкнутая кривая, не содержащая отрезков прямых, которая изучается в школе. Каждый треугольник определяет семейство окружностей, помогающих глубже и полнее понять «устройство» треугольника. В каком-то смысле изучаемая нами геометрия — это геометрия треугольника и окружности.

3.1. Равнобедренный треугольник

Некоторые понятия, связанные с треугольником

С каждым треугольником связан ряд отрезков и линий, имеющих специальные названия.

*Отрезок прямой, соединяющий какую-то вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой** треугольника (рис. 64).*

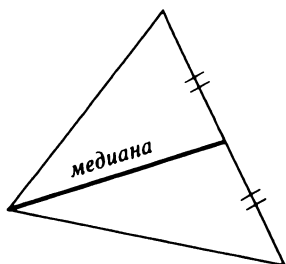


Рис. 64



Рис. 65

*Отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до точки пересечения со стороной треугольника называется **биссектрисой** треугольника (рис. 65).*

Проведем через вершину треугольника прямую, перпендикулярную противоположной стороне (точнее, перпендикулярно прямой, содержащей противоположную сторону).

*Отрезок этой прямой между вершиной и стороной треугольника (рис. 66) или ее продолжением (рис. 67) называется **высотой** треугольника.*

*Конец высоты, отличный от вершины, называется **основанием** высоты (рис. 67).*

Понятно, что у каждого треугольника имеются три медианы, три биссектрисы и три высоты.

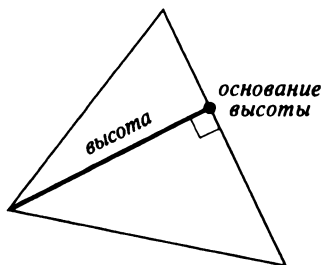


Рис. 66

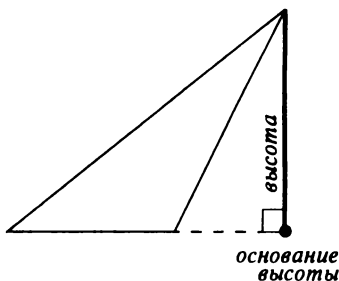


Рис. 67

Равнобедренный треугольник. Основные свойства

Треугольник с двумя равными сторонами называется **равнобедренным**, при этом равные стороны называются **боковыми сторонами**, а третья сторона — **основанием равнобедренного треугольника** (рис. 68).

Если у треугольника равны все три стороны, то он называется **равносторонним** (рис. 69).

Основные свойства равнобедренного треугольника мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3.1.

В любом равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.

Доказательство. Оба эти свойства доказываются совершенно одинаково. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC$. Пусть BB_1 — биссектриса этого треугольника (рис. 70). Как известно, прямая BB_1 является осью симметрии угла ABC . Но в силу равенства $AB = BC$ при этой симметрии точка A переходит в C . Следовательно, треугольники ABB_1 и CBB_1 равны. Отсюда все и следует. Ведь в равных фигурах равны все соответствующие элементы. Значит, $\angle BAB_1 = \angle BCB_1$. Пункт 1) доказан. Кроме того, $AB_1 = CB_1$, т. е. BB_1 — медиана и $\angle BB_1A = \angle BB_1C = 90^\circ$; таким образом, BB_1 также и высота треугольника ABC . ▼

Теорема о равнобедренном треугольнике имеет непосредственное отношение к свойствам окружности. Ведь любую хорду окруж-

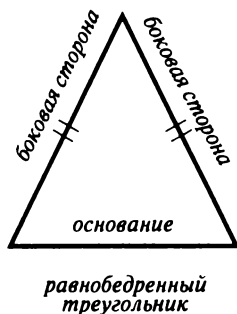


Рис. 68



Рис. 69

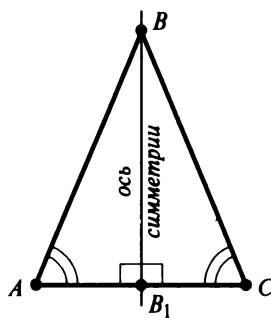


Рис. 70

ности можно рассматривать как основание равнобедренного треугольника, противоположная вершина которого расположена в центре окружности. Этот прием часто используется при доказательстве различных свойств окружности и решении задач.

Свойство хорд окружности

Непосредственным следствием теоремы 3.1 является теорема 3.2, в которой говорится об одном важном свойстве хорд окружности.

Теорема 3.2.

Перпендикуляр, опущенный из центра окружности на хорду этой окружности, делит хорду пополам.

Это же можно выразить несколько иначе.

Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть треугольник OPK , где PK — некоторая хорда окружности, а O — центр (рис. 71). Этот треугольник равнобедренный: $OP = OK$. Теперь мы можем воспользоваться п. 2) теоремы 3.1. Перпендикуляр, опущенный из вершины O на PK , делит PK пополам. ▼

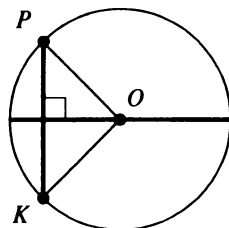


Рис. 71

Пересечение двух окружностей, а также прямой и окружности

На основании личного опыта, многократных наблюдений мы знаем, что две окружности или окружность и прямая могут пересечься не более чем в двух точках. Это кажется настолько очевидным, что не нуждается в доказательстве.

И все же, как доказать это свойство, если опираться на факты, доказанные в этой и предыдущей главах?

Теорема 3.3.

Окружность и прямая, а также две окружности могут пересечься не более чем в двух точках.

При этом точки пересечения окружности с прямой симметричны относительно перпендикуляра к этой прямой, проходящего че-

рез центр, а точки пересечения двух окружностей симметричны относительно прямой, проходящей через их центры.

Подчеркнем, что эта теорема утверждает лишь то, что число точек пересечения окружности и прямой, а также двух окружностей, не может быть равно 3, 4 и т. д.

Доказательство. Начнем со случая пересекающихся окружности и прямой.

Если прямая проходит через центр окружности, то наше утверждение вполне очевидно. На прямой имеется ровно две точки, удаленные от данной точки этой прямой на определенное расстояние.

Рассмотрим теперь общий случай (рис. 72). Пусть окружность с центром O пересекается с прямой a в точке A . Опустим из O перпендикуляр b на прямую a . Если A_1 — еще одна точка пересечения прямой a с окружностью, то треугольник AOA_1 является равнобедренным с основанием AA_1 . По теореме 3.1 (п. 2) перпендикуляр b делит отрезок AA_1 пополам, или, иначе, A_1 симметрична A относительно b . Это означает, что, помимо точки A , прямая a может пересечься с окружностью не более чем еще в одной точке.

Перейдем теперь к двум пересекающимся окружностям. Рассмотрим две пересекающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 (рис. 73). Пусть A — какая-то из точек пересечения этих двух окружностей, не лежащая на прямой O_1O_2 . Если точек пересечения более одной, то такая точка A найдется. Зафиксируем эту точку. Мы утверждаем, что помимо точки A окружности могут пересечься еще в единственной точке — симметричной A относительно прямой O_1O_2 .

В самом деле, пусть A_1 — какая-то точка пересечения окружностей, отличная от A . Прямая, проходящая через O_1 перпендикулярно AA_1 , делит AA_1 пополам. Это следует из теоремы 3.2, ведь

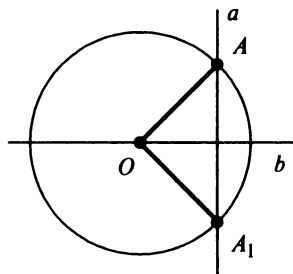


Рис. 72

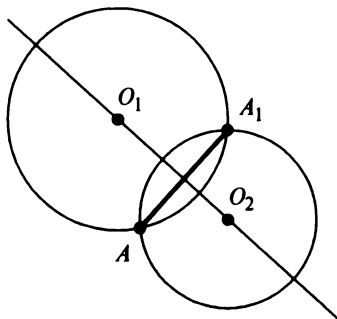


Рис. 73

AA_1 — хорда окружности с центром O_1 . Точно так же пополам делит AA_1 прямая, проходящая через O_2 перпендикулярно AA_1 . Значит, эти два перпендикуляра совпадают с прямой O_1O_2 , т. е. мы доказали, что A_1 симметрична A относительно прямой O_1O_2 . Таким образом, число точек пересечения двух окружностей не более двух. ▼

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

1. Может ли высота треугольника находиться вне треугольника?
- 2(в). Докажите, что у равностороннего треугольника равны все углы.
- 3(в). Две стороны треугольника равны 3 и 4. Медиана, проведенная к третьей стороне, делит этот треугольник на два. Найдите разность периметров получившихся треугольников.
- 4(в). В треугольнике ABC известны стороны $AB = 5$, $AC = 7$. На стороне AB взята точка M так, что $AM : MB = 2 : 3$, а на стороне AC — точка K , причем $AK : KC = 2 : 5$. В каком отношении биссектриса угла A делит отрезок MK ?
- 5(в). Докажите, что если три окружности имеют общую хорду, то их центры расположены на одной прямой.
6. Докажите, что радиусы двух равных пересекающихся окружностей, проведенные в точку их пересечения, образуют равные углы с общей хордой.
7. В окружности проведены два диаметра. Докажите, что концы диаметров служат вершинами четырехугольника, противоположные стороны которого равны.
- 8(в). Докажите, что в равнобедренном треугольнике равны медианы, проведенные к боковым сторонам.
- 9(п). В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. На этих сторонах взяты соответственно точки K и M так, что $BK = BM$. Докажите, что $CK = AM$.
- 10(п). В плоскости даны два равных отрезка AB и A_1B_1 . Докажите, что на плоскости можно выбрать две прямые таким образом, что в результате двух последовательных симметрий

(сначала относительно первой, а затем — второй прямой) точка A перейдет в точку A_1 , а точка B — в точку B_1 .

11(п). Докажите, что в равнобедренном треугольнике: а) три медианы пересекаются в одной точке; б) три биссектрисы пересекаются в одной точке; в) три высоты пересекаются в одной точке (возможно, для этого их придется продолжить за основание высоты).

12(т). Докажите, что если в четырехугольнике равны все его стороны, то диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам.

13(т). Можно ли два равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами расположить так, чтобы один лежал внутри другого?

14. Изобразите треугольники со сторонами:

а) 8, 10, 12; б) 6, 8, 10; в) 6, 8, 12; г) 6, 10, 12.

В каждом из этих треугольников проведите: 1) три медианы; 2) три биссектрисы; 3) три высоты; 4) медиану, биссектрису и высоту из одной вершины (любой). Постарайтесь все эти построения выполнить как можно точнее и аккуратнее. (Самое трудное — построение биссектрисы — можно выполнять на «глазок».)

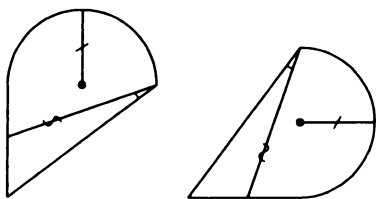
Попробуйте сделать какие-нибудь выводы. Например, какая из трех линий, выходящих из одной вершины, лежит между двумя другими.

3.2. Признаки равенства треугольников

Как вы знаете, равные фигуры — это такие фигуры, которые можно совместить друг с другом, наложить друг на друга так, чтобы они совпали (рис. 74).

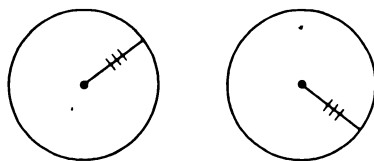
А как все же можно установить равенство двух фигур? Нельзя же всякий раз совмещать их друг с другом. Равенство каких элементов — отрезков, углов или чего-то иного — обеспечивает и равенство самих фигур?

Мы знаем, что два отрезка равны, если равны их длины. Из равенства радиусов следует и равенство окружностей (рис. 75). А как быть с треугольниками? Равенство каких элементов двух треуголь-



*У равных фигур равны
все соответствующие элементы.*

Рис. 74



равные окружности \Leftrightarrow равные радиусы

Рис. 75

ников обеспечивает равенство самих треугольников? При этом надо, чтобы число таких элементов было как можно меньше.

Полностью ответить на последний вопрос вряд ли возможно. Однако во многих практических и теоретических случаях удобно использовать следующие признаки равенства треугольников.

Первый признак равенства треугольников

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 76). Пусть в этих треугольниках равны стороны AB и A_1B_1 , AC и A_1C_1 , а угол BAC равен углу $B_1A_1C_1$. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ можно наложить на треугольник ABC так, чтобы угол $B_1A_1C_1$ совпал с углом BAC . При этом можно расположить треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона A_1B_1 совпала со стороной AB , а сторона A_1C_1 — со стороной AC . (В случае необходимости вместо треугольника $A_1B_1C_1$

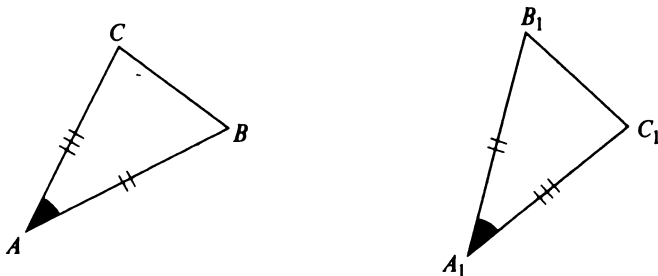


Рис. 76

можно рассматривать равный ему «перевернутый» треугольник, т. е. треугольник, симметричный $A_1B_1C_1$ относительно произвольной прямой.) Тогда треугольники совпадут полностью, поскольку совпадут все их вершины. ▼

Второй признак равенства треугольников

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $BC = B_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ (рис. 77).

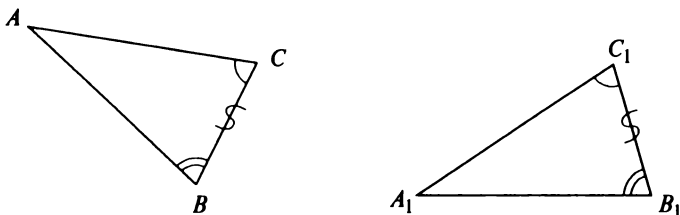


Рис. 77

Поступим так же, как и в предыдущем случае. Наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы совпали стороны BC и B_1C_1 и прилежащие к ним углы. Как и в предыдущем случае, при необходимости треугольник $A_1B_1C_1$ можно «перевернуть обратной стороной». Тогда треугольники совпадут полностью. Значит, они равны. ▼

Третий признак равенства треугольников

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (рис. 78). Перенесем треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона A_1B_1 совпала со стороной AB , при этом должны совпасть вершины A_1 и A , B_1 и B .

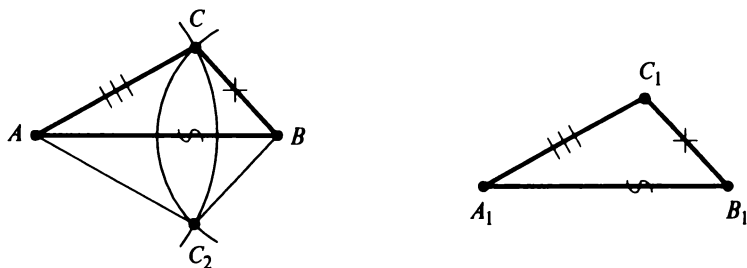


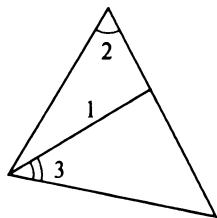
Рис. 78

Рассмотрим две окружности с центрами в A и B и радиусами соответственно AC и BC . Эти окружности пересекаются в двух симметричных относительно AB точках: C и C_2 . Значит, точка C_1 после переноса указанным образом треугольника $A_1B_1C_1$ должна совпасть либо с точкой C , либо с точкой C_2 . В обоих случаях это будет означать равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, поскольку треугольники ABC и ABC_2 равны. ▼

Как мы видим, для всех трех признаков характерно равенство трех элементов. И это не случайно. Треугольник, как правило, определяется заданием именно трех элементов (рис. 79). И если эти три элемента определяют единственный треугольник, то справедлив и соответствующий признак равенства треугольников.

Однако это далеко не всегда имеет место. Решим, например, следующую задачу.

Задача. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ (рис. 80). Обязательно ли такие треугольники равны?



Треугольник, как правило, задается тремя элементами.

Рис. 79

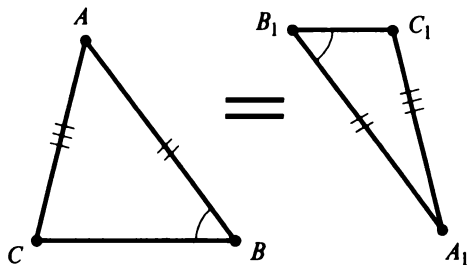


Рис. 80

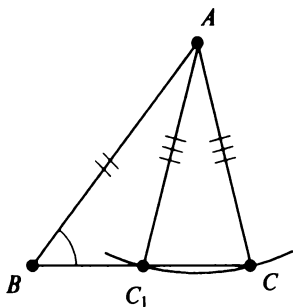


Рис. 81

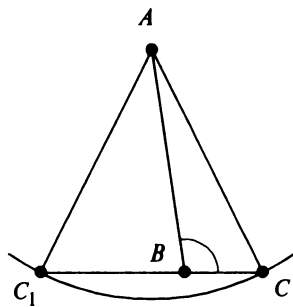


Рис. 82

Для того чтобы доказать, что такие треугольники могут быть и не равными, достаточно «предъявить» два неравных треугольника, у которых равны указанные в условии элементы. Как говорят математики, построить опровергающий пример.

Решение. Рассмотрим на плоскости какой-нибудь острый угол, вершину которого обозначим буквой B (рис. 81). Возьмем на одной из его сторон точку A и с центром в этой точке нарисует окружность, которая пересекает другую сторону угла в двух точках. Обозначим эти точки через C и C_1 . Один из двух получившихся треугольников — это ABC , а другой — ABC_1 (можно считать, что точки A и A_1 , B и B_1 совпадают). Как видим, эти треугольники не равны, хотя и удовлетворяют всем условиям нашей задачи. ▼

Однако если потребовать, чтобы равные углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ были неострыми, то такие треугольники непременно будут равны. Дело в том, что в этом случае одна из точек пересечения окружности с прямой, на которой лежит вторая сторона угла, окажется вне угла (рис. 82). Ведь согласно теореме 3.3 эти точки симметричны относительно перпендикуляра, опущенного из точки A на эту прямую, т. е. в этом случае условия задачи определяют единственный треугольник.

Итак, справедлива теорема, которую можно было бы назвать четвертым признаком равенства треугольников, но мы не станем ее так называть, поскольку это противоречит геометрическим традициям.

Теорема 3.4.

Если в треугольниках $A_1B_1C_1$ и ABC имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, причем указанные углы не являются острыми, то эти треугольники равны.

Утверждение этой теоремы следует из предыдущих рассуждений. Ведь, как было показано, можно построить единственный треугольник с заданными сторонами и углом.

Прямоугольный треугольник

В частности, соответствующий признак справедлив для прямоугольных треугольников. Но прежде, чем его сформулировать, напомним, что **прямоугольным** называется **треугольник**, у которого есть **прямой угол**. (Как мы знаем, у треугольника не может быть более одного прямого угла.)

Стороны, заключающие прямой угол прямоугольного треугольника, называются **катетами** прямоугольного треугольника.

Сторона, противоположная прямому углу, называется **гипотенузой** прямоугольного треугольника (рис. 83).

Из теоремы 3.4 следует специальный признак равенства прямоугольных треугольников.

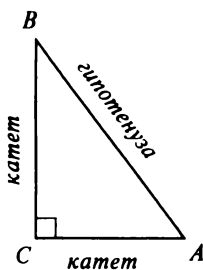


Рис. 83

Признак равенства прямоугольных треугольников

Два прямоугольных треугольника равны, если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого.

Кроме того, из первого признака равенства треугольников следует равенство прямоугольных треугольников по двум катетам.

Вернемся теперь к равнобедренному треугольнику. Оказывается, теорема 3.1 указывает не просто на свойства равнобедренного треугольника. Эти свойства характерны **только** для равнобедренного треугольника.

Признаки равнобедренного треугольника

Если в треугольнике ABC выполняется одно из следующих условий:

- 1) углы при вершинах A и C равны;
- 2) биссектриса и высота, выходящие из вершины B , совпадают;

- 3) *высота и медиана, выходящие из вершины B , совпадают;*
 4) *медиана и биссектриса, выходящие из вершины B , совпадают, то этот треугольник равнобедренный, причем $AB = BC$.*

Доказательство. Докажем это утверждение последовательно по пунктам.

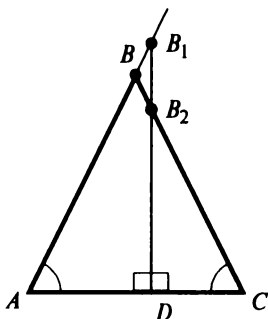
1) Обозначим через D середину AC и проведем через эту точку перпендикуляр к AC (рис. 84). Пусть этот перпендикуляр пересекается с прямой AB в точке B_1 , а с прямой CB в точке B_2 , как показано на рисунке. Тогда по второму признаку треугольники ADB_1 и CDB_2 равны, поскольку $AD = CD$, углы B_1AD и B_2CD равны по условию, а равенство углов B_1DA и B_2DC следует из того, что B_1 и B_2 лежат на перпендикуляре к AC , проходящем через D .

Таким образом, $DB_1 = DB_2$, точки B_1 и B_2 должны совпасть друг с другом, а значит, совпасть с точкой B . Следовательно, $AB = CB$.

Этот пункт можно доказать и иначе. При симметрии относительно перпендикуляра к AC , проходящего через точку D , точка C переходит в A , а точка A — в C . Угол A переходит в угол C , а угол C — в угол A . Прямая CB переходит в прямую AB , прямая AB — в прямую CB . Значит, треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$.

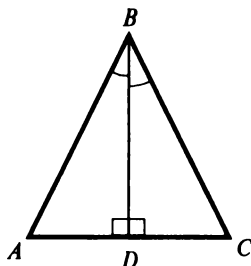
2) Если BD является биссектрисой и высотой треугольника ABC (рис. 85), то треугольники ABD и CBD равны также по второму признаку равенства треугольников, поскольку сторона BD у них общая, а углы, к ней прилежащие, равны. Значит, $AB = CB$.

3) Если BD является медианой и высотой (рис. 86), то треугольники ABD и CBD равны по первому признаку: сторона BD — общая, $AD = DC$, $\angle BDA = \angle BDC$.



$$\angle BAC = \angle BCA \Rightarrow AB = BC$$

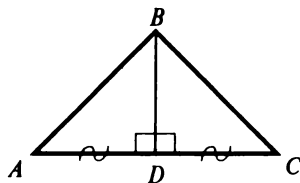
Рис. 84



$$\triangle ABD = \triangle CBD$$

(по второму признаку)

Рис. 85



$\triangle ABD = \triangle CBD$
(по первому признаку)

Рис. 86

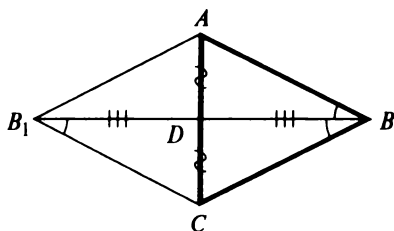


Рис. 87

4) Проведем медиану BD и продолжим ее за точку D (рис. 87). На этом продолжении возьмем точку B_1 так, что $DB_1 = DB$. Треугольники ABD и CB_1D равны по первому признаку: углы ADB и CDB_1 равны как вертикальные, кроме того, $DB = DB_1$, $AD = DC$. Следовательно, $CB_1 = AB$ и $\angle DB_1C = \angle DBA$. Но $\angle DBA$ равен $\angle DBC$, поскольку по условию BD — и медиана, и биссектриса. Таким образом, в треугольнике BCB_1 равны углы при стороне BB_1 . Значит, в соответствии с первым пунктом теоремы $CB_1 = CB$. Кроме того, $CB_1 = AB$ и, следовательно, $CB = AB$. ▼

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

1. На рисунке 88: $BA = AM$, $AC = AK$, $\angle BAC = \angle KAM$. Перечислите все пары равных треугольников с вершинами в точках A , B , C , K и M .

2(в). Две прямые пересекаются в точке A . На одной из прямых взяты точки B и C , а на другой — P и K так, что $AB = AC$, $AP = AK$. Докажите, что $BP = CK$.

3(в). В треугольнике ABC проведена медиана BB_1 . На луче BB_1 взята точка M так, что $B_1M = BB_1$. Докажите, что $MA = BC$, $MC = BA$.

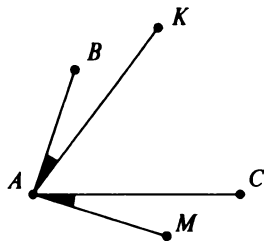


Рис. 88

4(т). В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1 . Пусть M — такая точка плоскости, что отрезок MB_1 пересекает

сторону BC в точке K , $BM = AB_1$, $\angle MBB_1 = \angle BB_1A$. Докажите, что $BK = KB_1$.

- 5(п). На боковых сторонах равнобедренного треугольника во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины равносторонних треугольников (отличные от вершин равнобедренного) с серединой основания равнобедренного треугольника, равны между собой.
- 6(п). На двух перпендикулярных прямых от точки пересечения отложены четыре равных отрезка. Докажите, что концы этих отрезков, отличные от общего, служат вершинами четырехугольника с равными сторонами и равными углами.
- 7(т). Докажите, что если у четырехугольника все стороны и все углы равны, то его диагонали равны и перпендикулярны.
- 8(т). Докажите, что если у четырехугольника противоположные стороны попарно равны, то точка пересечения его диагоналей является центром симметрии четырехугольника.
9. На листе бумаги изображен треугольник. Постройте треугольник, ему равный.
10. На листе бумаги изображен угол. Постройте какой-нибудь угол, равный изображенному.
- 11(в). Докажите, что в окружности равные хорды видны из центра под равными углами. (Отрезок AB виден из точки O под углом AOB .)
- 12(в). Докажите, что середины равных хорд окружности расположены на окружности с тем же центром.
- 13(т). На плоскости изображен угол в 19° . Постройте угол в 1° .
- 14(т). В треугольнике ABC известны стороны $AB = 4$, $BC = 5$, $CA = 7$. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно биссектрисе угла BAC , пересекает AC в точке K . Через K проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла BCA , которая пересекает BC в точке M . И, наконец, через M проходит прямая, перпендикулярная биссектрисе угла ABC , которая пересекает AB в точке P . Найдите длину отрезка AP .
- 15(т). В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 6$. На BC взята точка M так, что $CM = 1$. Прямая, проходящая через M перпендикулярно биссектрисе угла ACB , пересекает

AC в точке N , а прямая, проходящая через N перпендикулярно биссектрисе угла BAC , пересекает прямую AB в точке K . Найдите BK и AK .

- 16(т). В треугольнике ABC известно, что $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$. На сторонах AB , BC и CA взяты точки K , L и M так, что прямые KL , LM и MK перпендикулярны соответственно биссектрисам углов ABC , BCA и CAB . На какие отрезки делят точки K , L и M стороны треугольника ABC ?

17. Окружность с центром в точке O образует при пересечении со сторонами треугольника ABC равные хорды. Докажите, что у треугольников ABO , BCO и CAO равны высоты, выходящие из вершины O .

18. Будут ли равны два четырехугольника, если у них все стороны соответственно равны?

19. Докажите, что если у двух выпуклых четырехугольников соответственно равны все стороны и по одному углу, то такие четырехугольники равны.

20. На рисунке 89 изображен некоторый многоугольник. Представьте себе, что дано задание перерисовать этот многоугольник в тетрадь. Вы, конечно, легко это сделаете. Но тут звонит одноклассник, у которого дома не оказалось учебника. Постарайтесь сообщить по телефону необходимые данные, чтобы он смог выполнить задание. Запишите эти данные.

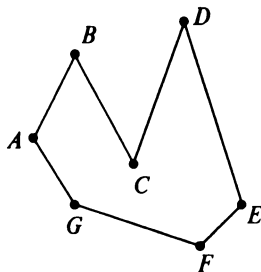


Рис. 89

- 21(п). Три черепахи находятся в точках A , B и C , являющихся вершинами равностороннего треугольника. Они одновременно с одинаковой скоростью начинают ползти. Черепаха, находившаяся в A , ползет по прямой AB в направлении к B . Черепаха из B ползет в C , черепаха из C ползет в A . Докажите, что во все моменты времени черепахи располагаются в вершинах равностороннего треугольника.

- 22(п). Докажите, что любые две медианы равностороннего треугольника пересекаются под углом 60° .

- 23(т). На сторонах AB , BC и CA равностороннего треугольника взяты соответственно точки K , M и P так, что $AK = BM = CP$.

Докажите, что прямые AM , BP и CK при пересечении образуют равносторонний треугольник.

24. ABC и APK — два равных треугольника. Известно, что $AB = 3$, $AC = AP = 4$, $AK = 5$. Чему равны стороны BC и PK ?

25. В треугольнике ABC известны углы: $\angle BAC = 52^\circ$, $\angle BCA = 44^\circ$. Из вершины B провели медиану и высоту и продолжили их за сторону AC на расстояния, равные им. Получили точки P и K . Чему равен $\angle PCK$?

26. Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно некоторой прямой. Докажите равенство треугольников AA_1B и AA_1B_1 , а также ABB_1 и A_1BB_1 .

27(п). Попробуйте еще раз доказать все три признака равенства треугольников, используя понятие осевой симметрии. Для этого докажите, что если на плоскости имеются два треугольника, для которых выполняется один из трех признаков равенства треугольников, то всегда один треугольник можно перенести в другой с помощью не более, чем трех осевых симметрий.

28(п). На рисунке 90 изображена треугольная пирамида с вершинами A , B , C и D . Докажите, что все грани этой пирамиды являются равными треугольниками, если:

- $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$;
- $AB = CD$, $AC = BD$, $\angle ABD = \angle BDC$;
- $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CAB$, $\angle DAB = \angle ABC$;
- $\angle ABD = \angle BDC$, $\angle ADB = \angle CBD$, $\angle ADC = \angle BAD$.

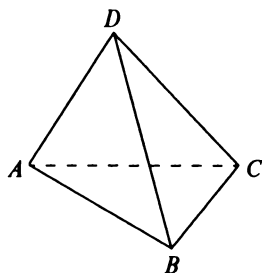


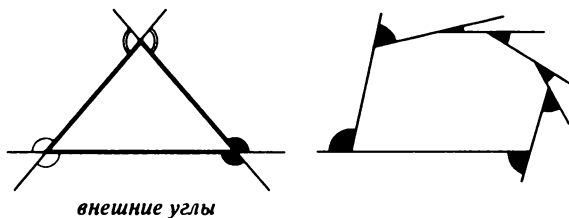
Рис. 90

3.3. Неравенства в треугольнике.

Касание окружности с прямой и окружностью

Теорема о внешнем угле треугольника

Мы начнем этот параграф с одной очень важной для построения геометрической теории теоремы. Правда, ее «жизнь» окажется не очень продолжительной и в дальнейшем она будет заменена более



внешние углы

Рис. 91

сильным утверждением. Но сейчас она нам очень нужна. Прежде чем ее сформулировать, введем понятие внешнего угла треугольника.

*Углы, смежные с углами треугольника, называются **внешними углами треугольника**.*

Понятие внешнего угла распространяется и на выпуклые многоугольники (рис. 91).

Теорема 3.5.

Внешний угол треугольника больше любого внутреннего, с ним не смежного.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и какой-либо из его внешних углов, например угол, смежный с углом ACB (рис. 92). Докажем, что он больше угла CBA .

Проведем медиану AD и продолжим ее за точку D на такое же расстояние. Получим точку A_1 . Можно поступить и иначе: возьмем точку A_1 , симметричную A относительно середины BC — точки D . (Этот прием мы уже использовали. Запомните его!)

Треугольник DCA_1 равен треугольнику DBA (по первому признаку), откуда $\angle DBA = \angle DCA_1$. Но угол DCA_1 меньше угла, смежного с углом ACB , поскольку составляет его часть. ▼

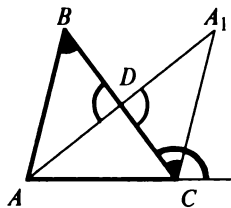


Рис. 92

Неравенство между сторонами и углами треугольника

На основании теоремы 3.5 можно доказать еще несколько утверждений, важных для теории и полезных при решении геометрических задач.

Теорема 3.6.

В любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол. И, наоборот, против большего угла лежит большая сторона.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB (рис. 93). Возьмем на стороне AC точку D так, что $AD = AB$. В равнобедренном треугольнике ABD , как известно, равны углы ABD и ADB . Но $\angle ABD$ меньше $\angle ABC$, а $\angle ADB$, по теореме о внешнем угле, больше $\angle BCA$. Значит, тем более, угол ABC больше угла BCA .

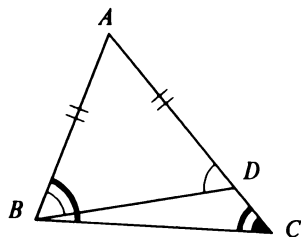


Рис. 93

А теперь — от углов к сторонам. Пусть в треугольнике ABC угол ABC больше угла ACB . Тогда из только что доказанного следует, что сторона AB не может быть больше стороны AC . Стороны AB и AC не могут быть равными. Остается единственное: $AB < AC$. ▼

Свойство перпендикуляра

Из теоремы 3.6 следует важное свойство перпендикуляра к прямой, которое ввиду его важности мы запишем в виде отдельной теоремы.

Теорема 3.7.

Пусть A — некоторая точка, расположенная вне прямой l , B — точка на l такая, что прямая AB перпендикулярна l , C — произвольная точка на l , отличная от B . Тогда $AB < AC$.

То, что прямая AB перпендикулярна l , можно записать следующим образом: $AB \perp l$.

Точку B называют **основанием** перпендикуляра, опущенного из точки A на l , или проекцией точки A на l .

Утверждение теоремы 3.7 кратко выражают следующим образом: **перпендикуляр меньше любой наклонной** (наклонной является AC), или так: **кратчайшим путем от точки к прямой является перпендикуляр к прямой**.

Доказательство. В треугольнике ABC угол ABC — прямой. Отсюда по теореме 3.5 угол ACB — острый (рис. 94), т. е. угол ABC больше угла ACB , поэтому по теореме 3.6 имеем $AB < AC$. ▼

Если мы теперь построим окружность радиуса AB с центром в точке A , то эта окружность будет иметь единственную общую точку с прямой l — точку B (рис. 95).

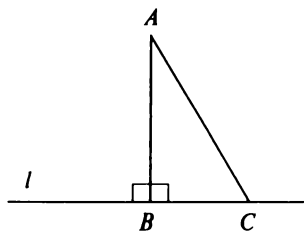


Рис. 94

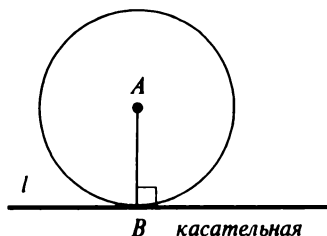


Рис. 95

Касательная к окружности

Если прямая имеет единственную общую точку с окружностью, то такая прямая называется **касательной** к окружности.

О такой прямой говорят также, что она **касается** окружности.

Общая точка окружности и касательной называется **точкой касания**.

По-существу, в последней фразе предыдущего пункта утверждается, что прямая l касается окружности с центром в A и радиусом AB (рис. 95). Точкой касания является точка B . Более того, верна следующая теорема.

Теорема 3.8.

Через любую точку окружности проходит единственная прямая, касающаяся окружности. Эта прямая перпендикулярна соответствующему радиусу в его конце.

Доказательство. То, что прямая, перпендикулярная радиусу в его конце, касается окружности, нами уже доказано. Остается доказать, что другой касательной с той же точкой касания нет.

В самом деле, пусть некоторая прямая проходит через точку B и касается окружности с центром в A и радиусом AB (см. рис. 95). Из определения касательной следует, что все точки этой прямой, кроме точки B , расположены вне круга с центром в A и радиусом AB . Значит, AB — кратчайшее расстояние от A до этой касательной, т. е. касательная проходит через B и перпендикулярна AB и, значит, совпадает с l . ▼

Неравенство треугольника

Тот факт, что кратчайшим путем между двумя точками плоскости является отрезок прямой линии, в частности, означает, что **в любом треугольнике сумма двух сторон больше третьей стороны**. Это очень важное свойство называется **неравенством треугольника**.

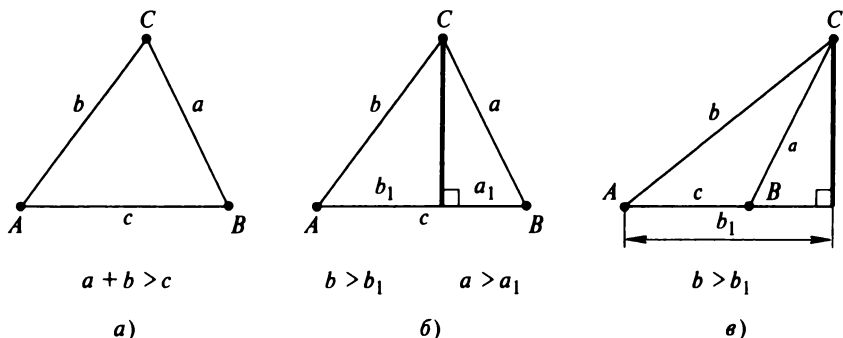


Рис. 96

Переведем это утверждение на алгебраический язык. В геометрии для сторон треугольника ABC общепринятыми считают обозначения $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Теперь в буквенной форме мы имеем три неравенства: $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$.

Из этих неравенств следует, что $c - b < a$, $c - a < b$, или в словесной форме: **разность любых сторон треугольника меньше третьей стороны треугольника.**

Неравенство треугольника следует также из свойства перпендикуляра (теорема 3.7). Как оно получается из этой теоремы, ясно из рисунков 96, а—в. (В доказательстве, проиллюстрированном на рисунке 96, б, мы используем одно простое свойство неравенств: одноименные неравенства можно почленно складывать. В данном случае это неравенства $b > b_1$, $a > a_1$. Значит, $a + b > b_1 + a_1 = c$.) Случай, изображенный на рисунке 96, в, разберите самостоятельно.

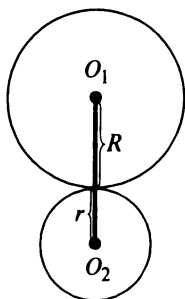
Касание двух окружностей

А теперь рассмотрим, как могут располагаться на плоскости две окружности.

Если две окружности пересекаются в двух точках, то, на основании неравенства треугольника, сумма их радиусов больше расстояния между центрами.

А при каких условиях две окружности будут иметь единственную общую точку, т. е. касаться? Понятно, что эта единственная общая точка должна быть расположена на прямой, проходящей через центры окружностей.

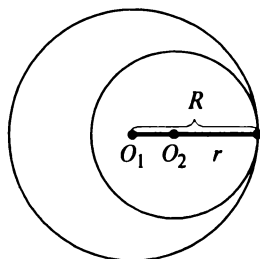
Возможны два вида касания двух окружностей: **внешнее** и **внутреннее**. Если расстояние между центрами равно сумме радиусов окружностей (рис. 97), то они касаются друг друга **внешним образом**.



внешнее касание

$$O_1O_2 = R + r$$

Рис. 97



внутреннее касание

$$O_1O_2 = R - r$$

Рис. 98

Если же расстояние между центрами равно разности радиусов, то касание **внутреннее**. При этом большая окружность содержит меньшую (рис. 98).

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

1. Известно, что кратчайшим расстоянием от точки до прямой является перпендикуляр. А сколь велик «выигрыш» в пути, если двигаться не по перпендикуляру, а по близкой к нему наклонной? Прodelайте следующий опыт. Пусть AB — перпендикуляр к прямой, причем B — основание перпендикуляра; C — некоторая другая точка прямой. Попробуйте сначала оценить «на глаз» с точностью до 0,1 см длину AC , а затем, выполнив построение, измерьте это расстояние с такой же точностью, если:

- а) $AB = 5$ см; $BC = 1$ см;
- б) $AB = 10$ см, $BC = 1$ см.

Интересно, намного ли вы ошиблись?

- 2(в). Пусть O — центр окружности радиуса R , A — точка плоскости, расположенная на расстоянии a от O . Среди точек окружности есть точка, самая близкая к A , и самая далекая от A точка. Обозначим первую точку через B , а вторую — через C . Как построить точки B и C ? Чему равны отрезки AB и AC , ес-

ли: а) $R = 3$, $a = 4$; б) $R = 5$, $a = 3$? Выразите AB и AC через R и a .

3(вт). На плоскости расположены точки A , B , C и D . Известно, что $AB = 1,3$, $BC = 2,4$, $CD = 1,8$, $AD = 5,5$. Найдите AC .

4(п). На плоскости расположены точки A , B , C и D . Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $AC + BD \leq 2$. Найдите AD .

5(п). Чему равна длина стороны AB треугольника ABC , если $BC = 1$, $CA = 7$ и длина стороны AB также выражается целым числом?

6(в). Найдите периметр равнобедренного треугольника, две стороны которого равны 3,9 и 7,9.

7(п). Имеются два отрезка, длины которых a и b . Известно, что существует треугольник со сторонами $a + 5b$, $5a + 6b$ и $3a + 2b$. Что больше: a или b ?

8(в). В каких пределах может меняться периметр треугольника, у которого две стороны равны a и b ?

9(в). Даны две окружности с радиусами R и r , расстояние между их центрами равно a . Пусть A — точка одной из окружностей, B — точка другой. Как построить точки A и B , для которых длина отрезка AB является наибольшей, и точки, для которых она наименьшая? Какова наибольшая и наименьшая длины отрезка AB , если:

а) $R = 5$, $r = 2$, $a = 8$;

б) $R = 7$, $r = 3$, $a = 5$?

Выразите эти величины через R , r и a .

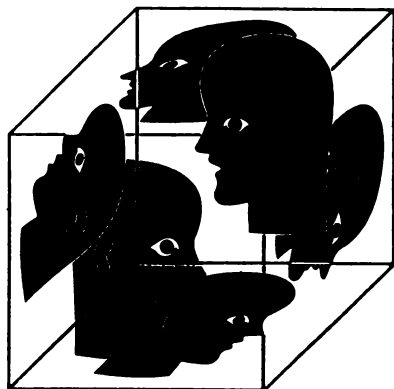
10(п). Дома Винни-Пуха и Пятачка находятся на расстоянии 1 км друг от друга. Однажды они одновременно вышли из своих домов и каждый пошел по какой-то прямой. Винни-Пух проходил 3 км в час, а Пятачок — 4 км в час. Через некоторое время они встретились. Сколько времени могло продолжаться их путешествие? Укажите наибольшее и наименьшее возможное время.

11(в). Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы двух сторон, между которыми она проходит.

12. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей меньше периметра, но больше его половины.

13. Дана окружность радиуса 3 и точка A на расстоянии, равном 5, от центра окружности. Найдите радиус окружности, касающейся данной и имеющей центр в точке A .
- 14(т). На плоскости имеются две окружности. Чему равен радиус окружности, касающейся данных окружностей и имеющей центр на прямой, проходящей через их центры, если радиусы данных окружностей и расстояние между их центрами соответственно равны: а) 1, 3, 5; б) 5, 2, 1; в) 3, 4, 5? Сколько решений имеет задача?
- 15(в). Имеются два равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами. Докажите, что основание меньше у того треугольника, у которого меньше противолежащий основанию угол.
- 16(т). Жители трех деревень, расположенных в вершинах треугольника, решили вырыть общий колодец. При этом они хотят расположить колодец в таком месте, чтобы общий путь всех семей за водой был как можно меньше. Каждая семья должна ходить за водой один раз в день. Где следует вырыть колодец, если в деревне A живет 100 семей, в деревне B — 200 семей, а в деревне C — 300 семей?
- 17(т). В вершинах треугольника расположены центры трех попарно касающихся окружностей. Найдите радиусы этих окружностей, если стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Сколько решений имеет задача?
18. Сколько различных треугольников можно составить из отрезков, длины которых равны 1, 2, 3, 4 и 5?
- 19(т). Ученик измерил стороны и диагональ некоторого четырехугольника и получившиеся числа расположил в порядке возрастания: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна диагональ четырехугольника?
- 20(п). Пусть x , y и z — произвольные положительные числа. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$.
- 21(п). Пусть a , b и c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что существуют положительные числа x , y и z такие, что $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$.
- 22(т). Известно, что в треугольной пирамиде $ABCD$ угол DAB больше угла DBA , угол DBC больше угла DCB . Какой из двух углов больше, DAC или DCA ?

Виды геометрических задач и методы их решения

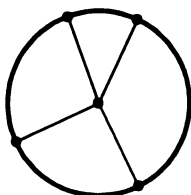


Отвечая на вопрос, чем уроки математики отличаются от других уроков, любой ученик наверняка скажет, что на уроках математики решают задачи. Научиться хорошо решать задачи по математике удастся далеко не всякому, но учиться решать задачи, учиться думать, тренировать и развивать «свои мозги» с помощью математических задач должен каждый ученик. В отличие от алгебры, в геометрии почти нет стандартных задач, решаемых по образцам. Каждая геометрическая задача требует «индивидуального» подхода.

В этой главе мы рассмотрим некоторые виды задач, характерные именно для геометрии. Кроме того, мы начнем разговор о методах и приемах, которые используются при решении геометрических задач.

4.1. Геометрические места точек

Вспомним, как мы определяли окружность. Вспомнили? Теперь заметим, что окружность мы определяли как *геометрическое место точек* (рис. 99). Что это значит?



Окружность — это геометрическое место точек.

Рис. 99

Под геометрическим местом точек будем понимать множество всех точек, обладающих определенным геометрическим свойством по отношению к какой-либо геометрической фигуре или другому объекту.

В случае окружности это множество состоит из всех точек плоскости, удаленных на заданное расстояние от фиксированной точки плоскости. В дальнейшем будет выяснено, что это

не единственный способ задания окружности как геометрического места точек (ГМТ).

Очень часто в качестве геометрического места точек выступает прямая линия или части прямой. Далее мы рассмотрим некоторые важнейшие случаи.

Серединный перпендикуляр к отрезку

Что представляет собой геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от концов заданного отрезка прямой на плоскости?

Сформулируем этот вопрос в виде задачи.

Задача 1. Дан отрезок AB , который лежит в некоторой плоскости. Найдите все точки M плоскости, для которых $AM = MB$.

Решение. Ответ следует из известных вам свойств равнобедренного треугольника.

Искомым геометрическим местом точек является прямая, перпендикулярная AB и проходящая через середину AB (рис. 100). Такую прямую называют **серединным перпендикуляром** к AB . Серединный перпендикуляр является осью симметрии, при которой A переходит в B (и наоборот).

В самом деле, если M — такая точка плоскости, что $AM = MB$, то согласно свойству равнобедренного треугольника M принадлежит серединному перпендикуляру. (Отдельно рассматриваем середину AB .)

Если же точка M принадлежит серединному перпендикуляру к AB , то (см. п. 3 теоремы о признаках равнобедренного треугольника на стр. 63) треугольник AMB — равнобедренный и $AM = MB$. ▼

Мы специально так подробно остановились на обосновании этого весьма простого и очевидного факта. Очень важно, чтобы вы обратили внимание на две стороны, две части любой задачи на нахождение геометрического места точек.

1. С одной стороны, надо указать, какой линии, какому множеству принадлежат точки, обладающие заданным свойством. (В данном случае точки, для которых $AM = MB$, лежат на серединном перпендикуляре к AB .)

2. С другой стороны, следует доказать, что все точки найденной линии, найденного множества обладают заданным свойством. (В рассматриваемой задаче: для всех точек M серединного перпендикуляра к AB имеет место равенство $AM = MB$.)

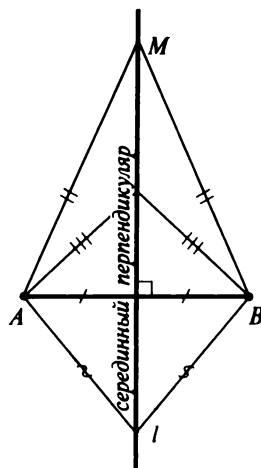


Рис. 100

Биссектриса угла

Биссектрису угла также можно рассматривать как геометрическое место точек.

Задача 2. Докажите, что геометрическим местом точек, расположенных внутри данного угла и равноудаленных от его сторон, является биссектриса этого угла.

Решение. Как и в предыдущем случае, мы должны провести следующие два рассуждения.

1. Если точка M расположена внутри угла и находится на равных расстояниях от его сторон, то M лежит на биссектрисе этого угла.

Опустив перпендикуляры MA и MB на стороны угла (рис. 101), из равенства $MA = MB$ на основании соответствующего признаку равенства прямоугольных треугольников получим, что треугольники OMA и OMB равны. Значит, равны углы MOA и MOB , т. е. OM — биссектриса угла AOB .

2. Если точка M лежит на биссектрисе, то M равноудалена от сторон угла.

Это утверждение также очевидно. Ведь при симметрии относительно

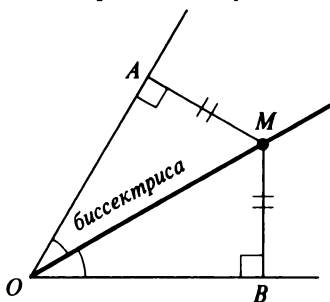


Рис. 101

прямой, содержащей биссектрису, стороны угла перейдут друг в друга. (Напомним: через любую точку плоскости проходит единственный перпендикуляр к заданной прямой.) ▼

Мы достаточно подробно решили здесь две (честно говоря, не такие уж трудные) задачи. Это, однако, не означает, что так же подробно вы должны записывать решение всех предлагаемых задач. Важно понимать, что это можно сделать, и записать самостоятельно подробное решение нескольких задач.

▲■● Задачи, задания, вопросы

-
- 1(вп).** Пусть A и B — точки плоскости. Найдите геометрическое место точек M этой плоскости, для которых: а) $AM < BM$; б) $AM \geq 2AB$; в) $AM + MB = AB$; г) $AM < AB$, $BM \geq AB$; д) точки A , B и M являются вершинами равнобедренного треугольника; е) $\angle ABM$ — наибольший угол треугольника ABM ; ж) $\angle BAM$ — наименьший угол треугольника ABM ; з) $\angle AMB$ — средний по величине угол треугольника AMB .
- 2(вп).** Пусть A , B и C — точки плоскости, не лежащие на одной прямой. Найдите геометрическое место точек M этой плоскости таких, что:
- прямая CM пересекает отрезок AB ;
 - луч CM пересекает отрезок AB ;
 - отрезок CM пересекает отрезок AB ;
 - $AM = BM = CM$;
 - ближайшей к M точкой среди точек A , B и C является A .
- 3(п).** На плоскости даны две пересекающиеся прямые: p и q . Найдите геометрическое место точек M : а) равноудаленных от p и q ; б) расположенных ближе к p , чем к q .
- 4.** На плоскости расположены две пересекающиеся прямые. Из точки их пересечения одновременно начинают двигаться две точки, каждая по своей прямой. Скорости точек равны. Какую линию описывает середина отрезка с концами в движущихся точках?
- 5(п).** На плоскости изображена окружность радиуса 1. Найдите геометрическое место точек M плоскости, для каждой из которых расстояние до ближайшей к M точки окружности равно 1.

- 6(т). На плоскости проведены три пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от этих прямых.
- 7(в). Найдите геометрическое место центров всевозможных окружностей плоскости, проходящих через две данные точки A и B этой плоскости.
8. Найдите геометрическое место центров всевозможных окружностей плоскости, пересекающих в двух точках отрезок AB этой плоскости.
- 9(т). Пусть A и B — точки плоскости, расстояние между которыми равно 1. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, для которых расстояния до A и B выражаются целыми числами.

4.2. Задачи на построение

Геометрические задачи на построение, возможно, самые древние математические задачи. Кому-то они сейчас могут показаться не очень интересными и нужными, даже надуманными. И в самом деле, где и зачем может понадобиться умение с помощью циркуля и линейки построить правильный семнадцатиугольник или треугольник по трем высотам, или даже просто построить прямую, параллельную данной. Современные технические устройства выполняют эти построения быстрее и точнее, чем любой человек, а также сделают и такие построения, которые невозможны, если использовать только циркуль и линейку.

И все же, без задач на построение геометрия перестанет быть геометрией. Нельзя по-настоящему почувствовать геометрию, познакомиться с ней, если «пройти мимо» этих, кажущихся сейчас немногими странными, задач на построение. С задачами на построение вы уже встречались и в младших классах, и в предыдущих параграфах этого учебника. Рассмотрим несколько несложных задач, которые должен уметь решать каждый ученик, и которые в дальнейшем послужат «детальками» при более сложных построениях.

Но прежде чем перейти к рассмотрению конкретных задач, напомним о тех условиях, которые связаны с задачами на построение.

Во всех таких задачах, если не сделано оговорок, речь идет о построении с помощью циркуля и линейки.

С помощью линейки мы можем через любые две точки плоскости провести прямую линию. И ничего более! Математическая линейка односторонняя и не имеет делений.

С помощью циркуля мы можем построить окружность с заданным центром и заданным радиусом. При этом радиус задается указанием таких двух точек на плоскости, расстояние между которыми равно радиусу.

Многие геометрические построения можно реализовывать различными путями. Поэтому надо стараться в каждом отдельном случае найти наилучшую последовательность построений. Правда, что означает «наилучшая последовательность», выяснить не всегда легко. Но в некоторых случаях это сделать все-таки удается.

Построение перпендикуляра к прямой

Задача 1. Дана прямая l и точка A вне этой прямой. Постройте прямую, проходящую через A и перпендикулярную l .

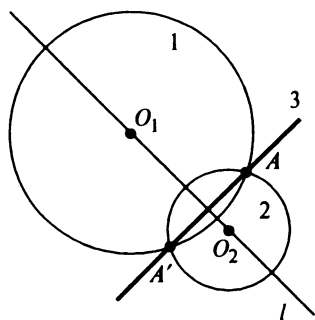


Рис. 102

Решение. Для построения перпендикуляра достаточно сначала построить точку A' , симметричную A относительно l . Для этого построим две окружности с центрами на l , проходящие через точку A (рис. 102; на этом рисунке и далее числа 1, 2, и 3 указывают последовательность проведения линий). Вторая точка пересечения этих окружностей и даст точку A' . Проведя прямую AA' , мы получим искомый перпендикуляр. ▼

Выполненное построение, как видите, очень экономично. Потребовалось провести всего две вспомогательные линии — две окружности, третьей линией стал искомый перпендикуляр. Меньшим числом проведенных линий обойтись нельзя.

А как быть, если точка A расположена на прямой l ? В этом случае можно было бы построить на прямой l точки B и C , равноудаленные от A , а затем построить серединный перпендикуляр к BC . Но это построение не столь экономно, как в случае, когда точка расположена вне прямой l .

Мы еще вернемся к этой задаче, после того, как приобретем нужные знания.

Деление отрезка пополам

Безусловно, любой из вас, даже тот, кто не слишком хорошо усвоил свойства геометрических фигур, о которых рассказано в предыдущих главах, справится с задачей деления отрезка пополам. И все же мы остановимся на этой задаче, поскольку она входит в число основных задач на построение.

Задача 2. Разделите данный отрезок пополам. Или, иначе: дан отрезок AB , постройте середину AB .

Задача сводится к построению серединного перпендикуляра к AB . Точка его пересечения с AB является искомой.

Решение. Построим две одинаковые пересекающиеся окружности с центрами A и B (рис. 103). Проведем прямую через точки их пересечения и найдем точку пересечения этой прямой с AB . Это и есть искомая середина прямой AB . ▼

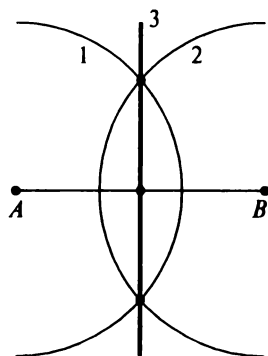


Рис. 103

Построение треугольника, равного данному, и угла, равного данному

Если на плоскости изображен треугольник, то мы без труда сможем в любом месте плоскости построить треугольник, равный изображенному. Будем исходить из третьего признака равенства треугольников.

Откладываем в нужном месте отрезок, равный одной из сторон треугольника. Затем с центрами в концах этого отрезка строим две окружности, радиусы которых равны двум другим сторонам. Находим точки пересечения этих окружностей и т. д. (рис. 104).

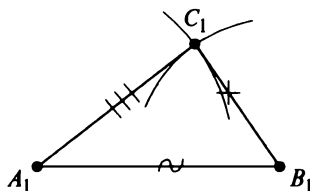
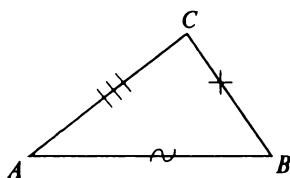


Рис. 104

Точно также строится треугольник по трем сторонам. Разница лишь в том, что дано не изображение треугольника, а три отрезка, равные его сторонам.

Умея строить треугольник, равный данному, мы легко справимся и с задачей построения многоугольника, равного изображенному, а также любой фигуры, образованной прямыми, лучами и отрезками.

Решим, например, следующую задачу.

Задача 3. Постройте угол, равный данному.

Решение. Это построение легко сводится к построению треугольника, равного данному. Выберем на сторонах угла произвольно по точке. Пусть это точки B и C , вершина угла — точка A (рис. 105).

Построив теперь треугольник, равный треугольнику ABC , мы вместе с этим построим и угол, равный данному. ▼

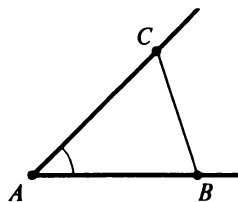


Рис. 105

Построение биссектрисы угла

Задача 4. Постройте биссектрису данного угла.

Решение. Рассмотрим угол с вершиной A . Проведем окружность произвольного радиуса с центром в точке A . Обозначим через B и C точки пересечения окружности со сторонами угла (рис. 106). Теперь построим две пересекающиеся окружности равного радиуса с центрами в точках B и C . Возьмем точку их пересечения, лежащую внутри угла. Обозначим ее буквой D . Треугольники ABD и ACD равны по трем сторонам. Значит, равны углы BAD и CAD . Луч AD является биссектрисой рассматриваемого угла. ▼

В отличие от предыдущих задач, решить которые без помощи учебника мог бы любой школьник, задача, о которой сейчас пойдет речь, является более трудной. Во всяком случае, решение, которое будет предложено, найти не очень легко. Да и обоснование правильности построения не столь очевидно.

Построение прямой, параллельной данной

Задача 5. Дана прямая l и точка A , расположенная вне этой прямой. Постройте прямую, проходящую через A и параллельную l .

Решение. Построим окружность, проходящую через точку A и пересекающую прямую l в точках B и C (рис. 107) так, что отрезки AB

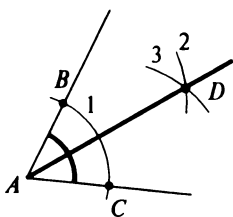


Рис. 106

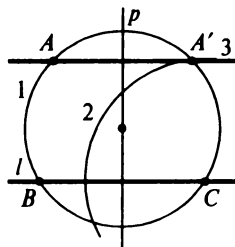


Рис. 107

и AC не равны. (Для этого центр окружности не должен лежать на перпендикуляре к прямой l , проходящем через A .) Построим теперь еще одну окружность с центром в C и радиусом, равным AB . Среди точек пересечения построенных окружностей есть одна точка, соединив которую с A , мы получим прямую, параллельную l (рис. 107). Докажем это. Рассмотрим прямую p , проходящую через центр первой из построенных окружностей и перпендикулярную l .

При симметрии относительно прямой p точки B и C переходят одна в другую. Точка A перейдет в такую точку A' первой окружности, для которой $CA' = BA$. Это означает, что A' — одна из точек пересечения наших окружностей. (Заметим, что A' не может совпасть с A . Вот для чего потребовалось условие $AB \neq AC$.) Прямые l и AA' перпендикулярны одной прямой p , а значит, они параллельны.

Итак, мы доказали, что среди точек пересечения окружностей в самом деле имеется такая точка A' , что прямая AA' параллельна l . Поскольку две окружности пересекаются не более, чем в двух точках, выбрать нужную точку пересечения, как правило, не трудно. ▼

Построение касательной к окружности

Теперь рассмотрим задачу о построении касательной к окружности. Но на этот раз построение будет не очень экономичным. Можно, конечно, показать и более удобное построение, но для его обоснования нужны геометрические знания, которых у нас пока нет.

Сейчас же мы хотим подчеркнуть, что, в принципе, задачу о построении касательной вполне можно решить. Кстати, в математике понимание подобной принципиальной возможности очень важно.

Задача 6. Дана окружность, у которой указан центр, и точка A вне этой окружности. Постройте прямую, проходящую через A и касающуюся данной окружности.

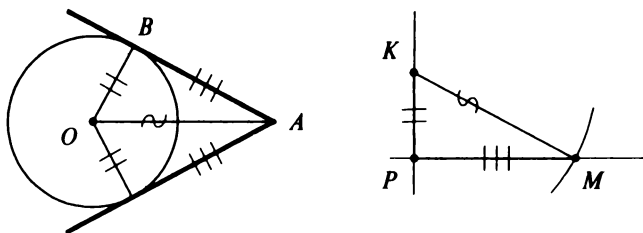


Рис. 108

Решение. Обозначим через O центр окружности, а через B — точку касания касательной с окружностью. Как мы знаем, угол ABO прямой. В прямоугольном треугольнике ABO известен катет BO , равный радиусу окружности, и гипотенуза AO . По этим данным можно построить треугольник, равный треугольнику ABO (рис. 108). (Вспомните специальный признак равенства прямоугольных треугольников.)

Для этого построим две перпендикулярные прямые в любом месте плоскости. На одной из прямых от точки P — точки их пересечения — отложим отрезок PK , равный радиусу BO . Затем проведем окружность радиуса AO с центром в точке K . Обозначим через M точку пересечения этой окружности со второй прямой.

Получившийся прямоугольный треугольник MPK равен треугольнику ABO . Катет MP равен касательной AB . Теперь строим окружность с центром в точке A и радиусом, равным MP . Точки ее пересечения с данной окружностью будут точками касания. Соединяя их с A , получим искомые прямые. ▼

Из наших рассуждений следует, что через произвольную точку, расположенную вне окружности, можно провести ровно две прямые, касающиеся этой окружности. При этом отрезки касательных от данной точки до точек касания равны. Последнее коротко можно выразить следующим образом: **касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны**. Это надо запомнить.

▲■● Задачи, задания, вопросы

1. Постройте отрезок, симметричный данному относительно заданной прямой.
2. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне.

- 3(в).** Постройте какую-нибудь окружность, касающуюся сторон данного угла.
- 4(вт).** Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.
- 5(в).** Разделите данную дугу окружности на две равные дуги.
- 6(в).** Постройте треугольник по двум сторонам и медиане к третьей стороне.
- 7(т).** Как провести прямую через две точки, если имеются циркуль и линейка, длина которой меньше расстояния между данными точками?
- 8(т).** На плоскости имеются три прямые: l , p и q . Постройте на прямых l и p точки A и B такие, чтобы отрезок AB был перпендикулярен прямой q и делился этой прямой пополам.
- 9(т).** Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую, образующую равные хорды при пересечении с этими окружностями.
- 10.** Разделите пополам данный отрезок, если есть линейка и сломанный циркуль, позволяющий изображать окружность только одного радиуса, причем этот радиус меньше половины отрезка.
- 11.** Даны окружность и прямая. Найдите на прямой все точки, касательные из которых к окружности равны данному отрезку.
- 12(п).** На плоскости изображена окружность, центр которой не указан. Постройте центр этой окружности.
- 13(п).** Имеется модель треугольной пирамиды, на гранях которой можно делать геометрические построения. Решите следующие задачи.
- а) В двух гранях пирамиды отмечено по одной точке. Постройте на листе бумаги отрезок, равный отрезку прямой, соединяющей отмеченные точки.
- б) В одной из граней проведены три прямые, пересекающиеся за пределами этой грани. При продолжении эти прямые образуют треугольник. Постройте на листе бумаги треугольник, который равен треугольнику, образованному этими прямыми.

4.3. Кратчайшие пути на плоскости

Как мы знаем, чтобы попасть из одной точки плоскости в другую кратчайшим путем, надо двигаться по прямой линии. Это простейшая задача на отыскание кратчайшего пути. Существует ряд гораздо более сложных, интересных и важных для практики задач подобного рода. Например, соединить несколько городов дорогами так, чтобы можно было проехать в каждый город из любого другого, а общая длина построенных дорог была наименьшей.

В этом параграфе мы рассмотрим классическую геометрическую задачу такого рода, которой очень легко придать занимательный вид. Но мы этого делать не будем и ограничимся сухой математической формулировкой.

Задача. Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой l точку M такую, чтобы длина двузвенной ломаной AMB была наименьшей.

Решение задачи затрудняет то, что точки A и B расположены по одну сторону от l . Вот, если бы ... (впрочем, не будем пытаться показать, каким образом смутная догадка может оформиться в настоящее решение). Рассмотрим само решение.

Решение. Возьмем любую точку M на прямой l . Построим точку A' , симметричную A относительно l (рис. 109). Поскольку $AM = A'M$, длина ломаной AMB всегда равна длине ломаной $A'MB$. Но последняя будет наименьшей, когда она превращается в отрезок прямой. Значит, искомой точкой на l будет точка, в которой ее пересечет отрезок $A'B$. Обозначим ее через M_0 .

Из соответствующих свойств углов следует, что для найденной точки M_0 лучи M_0A и M_0B образуют с l равные углы. Именно по такому закону происходит отражение света, т. е. если бы мы смогли направить луч света из A так, чтобы он, отразившись от прямой l , попал в B , то этот луч реализовал бы кратчайший путь. ▼

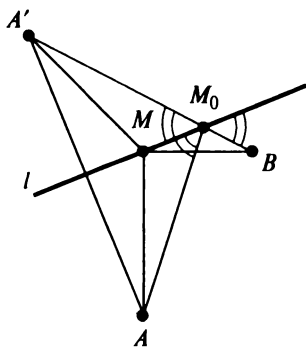


Рис. 109

▲■● Задачи, задания, вопросы

.....

- 1(п).** На реке расположены два острова A и B . Туристы, отправившись на байдарке от острова A , хотят попасть на остров B , побывав поочередно на левом и правом берегах реки. Как они должны проложить свой маршрут, чтобы весь путь имел наименьшую длину? (Берега реки — прямые линии.)
- 2(п).** Внутри острого угла отмечена точка A . Найдите на сторонах угла точки B и C такие, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.
- 3(п).** Дана треугольная пирамида $ABCD$. Найдите на ребре CD точку M так, чтобы длина ломаной AMB была наименьшей.

4.4. О решении геометрических задач

В предыдущих главах и параграфах мы рассмотрели много геометрических задач. Некоторые из них вам показались интересными, другие — не очень, одни были достаточно легкими, а другие — весьма трудными. Нам кажется, что многие школьники хотели бы научиться решать интересные и трудные задачи. Но как это сделать? Из чего складывается умение решать геометрические задачи?

Конечно, необходимо хорошо знать и понимать теорию, освоить понятия, усвоить теоремы, разобраться в доказательствах и приемах.

Надо учиться делать хорошие, большие и красивые чертежи, а иногда не чертежи, а рисунки. Чертежи-рисунки, если они выполнены грамотно, могут сильно облегчить поиск решения, работу над ним.

Следует по капле собирать геометрические факты, методы решения задач, отдельные приемы, обращая особое внимание на задачи, отмеченные буквой (п) (полезные). До некоторых методов и приемов самостоятельно додуматься не так-то просто. Но разобравшись в том, как этот метод «работает» на примере одной или нескольких задач, вы в дальнейшем сможете его самостоятельно применять.

Например, в предыдущем параграфе было разобрано решение одной красивой геометрической задачи о нахождении кратчайшего

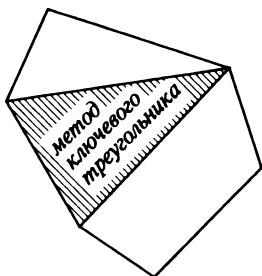


Рис. 110



Рис. 111

пути между двумя точками с «посещением» заданной прямой. После этого задачи, приведенные в конце параграфа, возможно, показались вам не такими уж трудными. Ведь в них (речь идет о двух первых задачах) надо было лишь дважды применить прием, использовавшийся при решении основной задачи.

Большинство доказанных до сих пор теорем относится к геометрии треугольника. Это не случайно. Ведь треугольник — это простейший из многоугольников, простейшая фигура. Решение очень многих задач сводится к рассмотрению одного или нескольких треугольников. Можно даже говорить о методе «ключевого треугольника». Суть его состоит в том, что в заданной фигуре надо найти треугольник (или треугольники), к изучению которого (которых) сводится решение задачи (рис. 110).

Иногда для этой цели надо сначала провести какое-нибудь дополнительное построение. Например, в четырехугольнике провести диагональ (рис. 111) или концы хорды окружности соединить с ее центром.

Следует запомнить некоторые построения, часто используемые в сходных ситуациях. Пока хотелось бы обратить ваше внимание на



одно дополнительное построение, касающееся медианы треугольника. Если в условии задачи фигурирует медиана треугольника, то очень часто помочь решению может продолжение медианы на расстояние, ей равное.

А теперь немного поговорим об одном, пожалуй, самом распространенном в школьной практике виде задач, — о задачах на вычисление. Результатом решения этих задач является ответ. Хотя ни в коем случае нельзя все сводить к поиску ответа.

«Ведь ответ-то правильный», — пытается защитить свое решение ученик от «придинок» учителя. Таким ученикам стоит запомнить следующий пример. Возьмем дробь $\frac{19}{95}$. Сократим на 9(?):

$$\frac{19}{95} = \frac{19}{95} = \frac{1}{5}. \text{ Ответ правильный.}$$

Но мы немного отвлеклись. В геометрических задачах на вычисление есть много общего с привычными арифметическими и алгебраическими задачами.

В некоторых случаях решить их можно, последовательно, шаг за шагом вычисляя нужные величины, пока не будет пройден путь от того, что дано, к тому, что нужно найти. В качестве примера рассмотрим задачу, аналогичную задаче 15 из § 3.2.

Задача 1. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 8$, $BC = 9$, $CA = 10$. На стороне AC взята точка M так, что $AM = 4$. Прямая, проходящая через M перпендикулярно биссектрисе угла C , пересекает прямую BC в точке P . Прямая, проходящая через P перпендикулярно биссектрисе угла B , пересекает AB в точке Q . И, наконец, прямая, проходящая через Q перпендикулярно биссектрисе угла A , пересекает AC в точке K . Найдите длину отрезка MK .

Решение. Решение этой задачи состоит из нескольких последовательных одинаковых шагов (рис. 112).

1) $MC = AC - AM = 10 - 4 = 6$. Треугольник MPC равнобедренный с основанием MP , поскольку биссектриса, выходящая из угла C , перпендикулярна MP . Значит, $PC = MC = 6$.

2) Точно так же находим: $BP = 3$, $BQ = BP = 3$.

3) $AQ = 5$, $AK = AQ = 5$.

Значит, длина отрезка MK равна 1. ▼

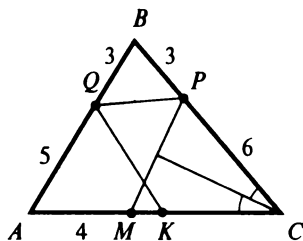


Рис. 112

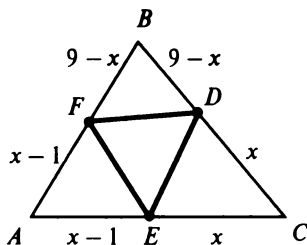


Рис. 113

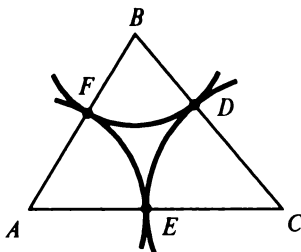


Рис. 114

Но не всегда удастся так последовательно, поэтапно получить ответ. В некоторых случаях приходится прибегать к составлению уравнений.

Рассмотрим следующую задачу, аналогичную задаче 16 из § 3.2.

Задача 2. Возьмем треугольник ABC со сторонами такими же, как и в предыдущей задаче. На сторонах AC , CB и BA взяты соответственно точки E , D и F так, что ED перпендикулярна биссектрисе угла C , DF перпендикулярна биссектрисе угла B и, наконец, FE перпендикулярна биссектрисе угла A . На какие отрезки точка E делит сторону AC ?

Решение. Обозначим EC через x (рис. 113). Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, последовательно получим: $DC = x$, $BD = 9 - x$, $BF = 9 - x$, $AF = 8 - (9 - x) = x - 1$, $AE = AF = x - 1$.

Но $AE + EC = 10$, или $(x - 1) + x = 10$, откуда $x = 5,5$. Точка E делит сторону AC на отрезки, равные 4,5 и 5,5. ▼

Важной особенностью многих интересных геометрических задач является их многовариантность. Условие задачи может быть реализовано несколькими различными способами. При решении все эти варианты необходимо рассмотреть, ничего «не прозевать». Это в равной степени относится ко всем видам геометрических задач, а мы рассмотрим пример все на ту же тему (с другими числами задачу 17 из § 3.3).

Задача 3. Найдите радиусы трех попарно касающихся окружностей с центрами в вершинах треугольника со сторонами 8, 9 и 10.

Решение. Как видим, рассматривается все тот же треугольник. Но на этом сходство не кончается. Воспользуемся теми же обозначениями, что и в задаче (рис. 114). В силу равенства $CE = CD$ окружность с центром в C и радиусом CE проходит и через D . Точно так же можно построить окружности с центрами в A и B , проходящие соответственно через E и F , D и F . Эти три окружности будут касаться друг друга внешним образом. Значит, задача 2 дает нам решение и этой задачи? Да, но не все. Ведь две окружности могут касаться и внутренним образом.

Возможны еще три(!) случая. Например, окружность с центром A содержит две другие (рис. 115). Если радиус окружности с центром A равен x , то радиусы окружностей с центрами B и C будут соответственно равны $x - 8$ и $x - 10$. Но сумма радиусов двух меньших окружностей равна $BC = 9$. Получаем уравнение

$$(x - 8) + (x - 10) = 9, \text{ откуда } x = 13,5.$$

Радиусы окружностей в этом случае равны 13,5; 5,5; 3,5. Предлагаем вам закончить решение самостоятельно. Мы же приведем полный ответ на вопрос задачи: (4,5, 3,5, 5,5); (13,5, 5,5, 3,5); (5,5, 13,5, 4,5); (3,5, 4,5, 13,5). ▼

Заканчивая этот параграф, мы хотели бы задать еще один вопрос. Какая из трех рассмотренных задач самая трудная — это ясно. А какая самая интересная по решению и красивая по формулировке?

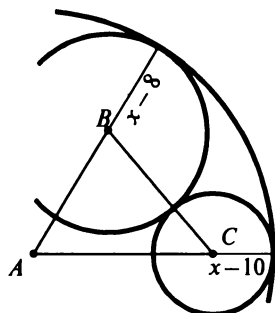


Рис. 115

▲■● Задачи, задания, вопросы

1. Точки A , B , C и D в указанной последовательности расположены на прямой, $AB = 2,3$, $BC = 3,5$, $CD = 1,3$. Точка M лежит на отрезке BC , причем $BM : MC = 3 : 4$. В каком отношении точка M делит отрезок AD ?
2. Внутри отрезка AC расположена точка B . Известно, что $AB = 1,2$. Отрезки AC и BC являются диаметрами окружностей. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.
3. Точки K , P и M являются серединами отрезков AB , BC и AC . В каком отношении точка M делит отрезок KP , если $AB = 1$, $BC = 3$, $AC = 4$?
- 4(т). На прямой расположены точки A , B , C и D , причем $AB = 2$, $CB = 3$. Отрезки AC и BD являются диаметрами двух окружностей. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.
- 5(т). На прямой расположены точки A , B , C и D так, что $AB = 3$, $BC = 1$, $CD = 2$, $AD = 6$. На каком расстоянии от A может находиться такая точка M этой же прямой, для которой $AM : MD = BM : MC$?
6. Чему равен угол, если известно, что биссектриса смежного с ним угла образует угол 20° с одной из сторон этого угла?

7. Через точку на прямой a проведены прямые p и q . Известно, что угол между прямыми a и p равен 20° , а угол между прямыми a и q равен 80° . Чему равен угол между прямыми p и q ?
- 8(т). Через одну точку плоскости проведены три прямые, разбивающие плоскость на 6 углов. Известно, что средний по величине угол равен среднему арифметическому наибольшего и наименьшего из образовавшихся углов. Найдите средний по величине угол.
- 9(т). Две стороны четырехугольника равны 1 и 4. Одна из диагоналей равна 2 и делит четырехугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите периметр четырехугольника.
- 10(т). В треугольнике ABC сторона AB равна 1, а длина стороны BC выражается целым числом. Биссектриса угла A перпендикулярна медиане, выходящей из вершины B . Найдите периметр треугольника.
- 11(т). Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC , пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB , если $BM = 8$, $KC = 1$.
- 12(т). В вершинах A , B , C и D четырехугольника $ABCD$ находятся центры четырех окружностей. Любые две окружности, центры которых расположены в соседних вершинах, касаются друг друга внешним образом. Известны три стороны четырехугольника: $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 5$. Найдите сторону AD .
- 13(т). Стороны пятиугольника равны (в порядке обхода) 7, 10, 12, 8 и 9. В вершинах пятиугольника расположены центры пяти окружностей, причем любые две соседние окружности касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус наименьшей окружности.
- 14(т). Окружность касается сторон угла с вершиной A . Расстояния от A до точек касания равны 5. К окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C . Известно, что центр окружности расположен вне треугольника ABC . Найдите периметр треугольника ABC .
- 15(т). В пирамиде $ABCD$ известны ребра: $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 10$, $AD = 8$. В вершинах пирамиды расположены центры шаров, касающиеся друг друга внешним образом. Найдите ребра BD и CD .

4.5. Доказательства в геометрии

Прежде чем продолжать строить геометрическую теорию, давайте подведем первые итоги и обсудим некоторые вопросы, которые, возможно, возникли у тех, кто искренне хотел лучше узнать и понять геометрию.

Теоремы и доказательства

В математике, в отличие от любой другой науки, есть такие понятия, как **теорема** и **доказательство**. Да и сама математика стала наукой лишь с появлением в ней теорем и доказательств.

Арифметические задачи и геометрические формулы можно встретить уже в египетских папирусах, написанных в третьем тысячелетии до нашей эры. Но в этих старинных текстах не было самого главного — доказательств. А без доказательств нет и самой математики.

Когда же появились первые доказательства? И тут сквозь дым времен перед нами предстает удивительный человек, знаменитый мудрец из древнегреческого города Милет. С поразительным единодушием историки науки присваивают звание первоматематика Фалесу Милетскому (625—527 гг. до н. э.). Впрочем, лучше назвать Фалеса первогеометром, ведь все его математические достижения связаны с геометрией. (Здесь, наверное, стоит сказать, что само понятие «математика» как название науки появилось лишь в начале XIX в. До этого ученые, занимавшиеся в нашем понимании математикой, назывались геометрами.) Считают, что первые геометрические теоремы доказаны именно Фалесом. Среди них всем известные теоремы о вертикальных углах и свойстве равнобедренного треугольника (равенство углов при основании). В следующем учебном году вы познакомитесь еще с одной теоремой, которая традиционно называется теоремой Фалеса.

Так что же это такое — теорема?



Под теоремой в математике понимают любое математическое утверждение, справедливость которого устанавливается с помощью *доказательства*.

Довольно часто в теореме можно четко выделить две части: то, что дано, и то, что требуется доказать. То, что дано, называют *условием* теоремы. То, что требуется доказать, — *утверждением* теоремы, или *заключением*.

Математическое доказательство проводится по четко определенным правилам. Исходя из ранее известных фактов и теорем, в соответствии с законами логики устанавливается справедливость новой теоремы.

Правда, в начале этого учебника мы сформулировали некоторые утверждения, которые были приняты в качестве верных, истинных без доказательств. Эти факты мы как бы объявили очевидными. Математики называют принимаемые без доказательств утверждения *аксиомами*. Мы же назвали их основными свойствами плоскости.

И теоремы, и доказательства появились в самом начале второй главы. С этого же момента могли возникнуть различные мнения: одни, наверное, считают, что некоторые из доказанных теорем вполне очевидны и в доказательствах не нуждаются. Просто математики играют в какую-то свою игру и навязывают остальным ее правила.

Надо сказать, что у тех, кто придерживается подобного мнения, есть достойные союзники. Известный таджикский и персидский поэт и математик Омар Хайям, живший в XI в., а в те времена сочетание поэзии и математики было явлением типичным, заметил, что Евклид в своих сочинениях доказал многое из того, что не нуждалось в доказательстве. (Надо сказать, что геометрию, которую мы изучаем, математики называют евклидовой.)



Другие, наоборот, могут быть недовольны уровнем строгости некоторых наших рассуждений. Что значит «наложим» один треугольник на другой? Или почему любая прямая пересекает треугольник не более, чем в двух точках? У сторонников этого взгляда также немало единомышленников, особенно среди профессиональных математиков.

Мы не будем сейчас выяснять, кто прав. Не следует даже такой вопрос задавать. Ведь вопросы типа «Кто лучше? Кто хуже?» — большей частью не имеют смысла. Но все же стоит заметить, что если бы человек время от времени не сомневался в очевидных фактах, то мы бы до сих пор считали, что Земля плоская и неподвижная, а Солнце вращается вокруг нее.

К этим проблемам мы еще вернемся в конце курса, а сейчас попробуем разобраться в тех методах доказательства, которыми уже пользовались в предыдущих главах. Ведь мы начали «доказывать» без всяких объяснений, опираясь лишь на здравый смысл.

Для этого поступим очень просто: просмотрим уже известные вам теоремы и выясним суть методов, используемых в их доказательствах.

Метод от противного

Теорема 2.1. Мы доказали эту теорему с помощью *метода от противного*. Суть его отражена в самом названии. Вначале мы предполагаем, что утверждение теоремы неверно, после чего с помощью тех или иных рассуждений получаем противоречие либо с исходным предположением, либо с условием теоремы, либо с известным математическим фактом. По-латыни этот метод называется «*reductio ad absurdum*», что означает «приведение к абсурду».

Не следует думать, что «метод от противного» такой уж специальный математический метод. Как и в любом математическом методе, в его основе лежит элементарный здравый смысл. Нередко к этому методу в своей работе прибегает следователь. Чтобы установить, кто мог совершить преступление, часто сначала надо установить, кто не мог его совершить.

Метод от противного очень любил использовать Евклид. И все же математики по-разному относятся к этому методу. Некоторые считают его одним из наиболее мощных орудий математики. Другие сравнивают с приемом политика, который поддерживает своего кандидата тем, что опорочивает репутацию кандидата другой партии.

Теоремы как следствие определений

Теорема 2.2 в особых комментариях не нуждается. Все основано на элементарном рассуждении: если от равных величин отнять поровну, то поровну и останется.

Теорема 2.3 непосредственно следует из свойств двух понятий: *осевая симметрия* и *перпендикулярность*. Подобного рода теоремы весьма часто встречаются в математике. Обычно они не очень сложны. Здесь самое главное — четко понимать смысл слов. (В данном случае *симметрия* и *перпендикулярность*.)

Теорема 2.3 — вспомогательная. С ее помощью мы доказываем важную теорему 2.4.

Перебор вариантов

Теорема 2.4. На ее доказательство стоит обратить внимание. Во-первых, в этом доказательстве мы рассматриваем два случая возможного расположения точки A . Необходимость рассматривать несколько случаев — типичное явление для геометрических теорем и задач. Правда, первый случай очень простой, но его необходимо учитывать, иначе доказательство будет неполным.

Метод симметрии при доказательстве

Во-вторых, в основном случае мы прибегаем к помощи симметрии, хотя в условии теоремы о ней не упоминается. Симметрия здесь является методом доказательства.

Рассмотрев симметричную точку, мы имеем возможность воспользоваться теоремой 2.3 и первым основным свойством плоскости.

Теорема 2.5 является очень простой и очевидной теоремой, полностью следующей из определения окружности и свойств симметрии.

Теорема 3.1 о свойствах равнобедренного треугольника. Здесь вновь в качестве метода доказательства используется симметрия.

Интересно, что, по существу, точно так же доказывал теорему о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника Льюис Кэрролл — замечательный сказочник и неистощимый выдумщик. Его сказки про девочку Алису и ее приключения в Стране Чудес и в Зазеркалье известны во всем мире. Однако не все знают, что Льюис Кэрролл — это псевдоним, а настоящее имя автора этих книг Чарлз Латуидж Доджсон, и что был он профессором математики в Оксфорде. Главным трудом своей жизни он считал «Дополнение» к своей книге «Евклид и его современные соперники».

Доказательство Льюиса Кэрролла проводится с помощью... ножниц. Допустим, что на листе бумаги нарисован равнобедренный треугольник ABC , причем $AB = BC$. Вырежем ножницами этот треугольник. Перевернем и попробуем заткнуть образовавшуюся дыру. Это нам удастся, не так ли? Сторона BC пойдет по бывшей стороне BA , а BA — по BC . Значит, все вершины исходного и перевернутого треугольника совпадут, вершина C займет место вершины A . Таким образом, угол C равен углу A . Теорема доказана.

Понятно, что рассмотренный нами «метод симметрии» и «метод ножниц» Льюиса Кэрролла — это, по-существу, одно и то же.

Из свойств равнобедренного треугольника сразу следуют некоторые свойства окружности. Ведь любой треугольник, у которого одна вершина в центре окружности, а две другие лежат на окружности, является равнобедренным. Именно такой подход лежит в основе доказательства **теоремы 3.2** и **теоремы 3.3**.

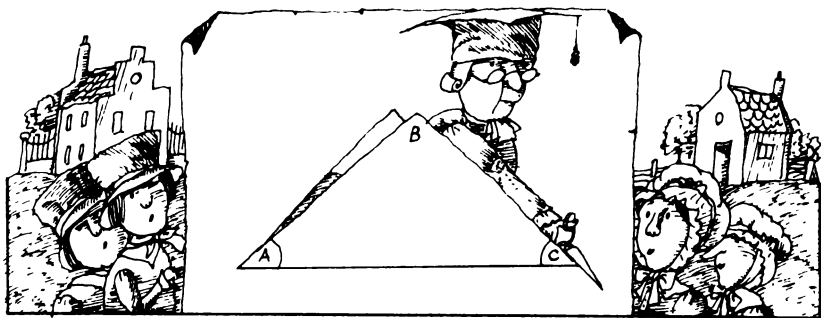
В теореме 3.3 вновь следует обратить внимание на рассмотренные ниже два момента.

Некоторые тонкости

Рассматривая случай двух пересекающихся окружностей, мы не проводим сразу прямую, соединяющую их центры, а опускаем перпендикуляры из центров на общую хорду. Согласно свойству равнобедренного треугольника мы заключаем, что эти перпендикуляры сливаются в одну прямую.

И еще, наше рассуждение начинается с того, что мы фиксируем одну из точек пересечения окружностей. После чего доказываем, что к ней можно добавить не более одной точки пересечения.

Далее мы рассматриваем три признака равенства треугольников. Никаких математических тонкостей в их доказательстве нет. Все основывается на здравом смысле.



Контрпример

А вот задача, предшествующая **теореме 3.4**, представляет интерес. В ней рассматриваются треугольники с двумя парами равных сторон и соответствующей парой равных углов (не между сторонами). Обязательно ли такие треугольники являются равными?

Здесь возникает более общий вопрос. Каким образом можно опровергнуть неверное утверждение, теорему? Одним из наиболее распространенных способов является построение опровергающего примера, или, как говорят математики, **контрпримера**.

Способ опровержения с помощью контрпримера применяется не только в математике. Его часто используют в самых различных науках и даже в обычной жизни. Если кто-либо утверждает, что птицы отличаются от других животных наличием крыльев, то можно в качестве контрпримера указать на бескрылую птицу киви, живущую в Новой Зеландии, или же на известных всем летучих мышей.

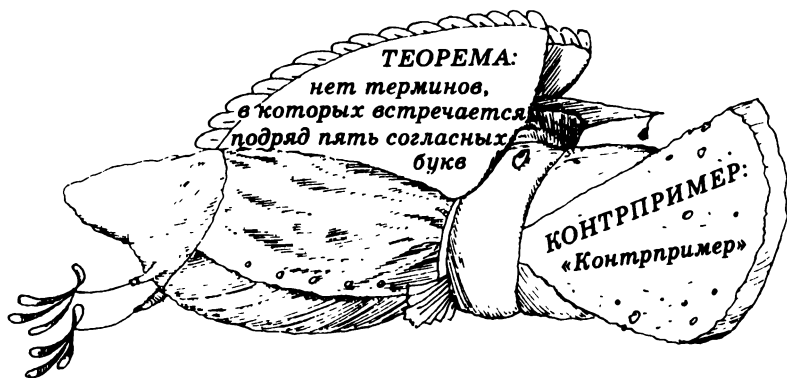
Так и в нашей задаче приводится пример, показывающий, что два треугольника, у которых есть две пары равных сторон и пара соответствующих равных углов, могут и не быть равными.

Однако этот пример оказывается невозможным, если рассматриваемый угол не острый. В результате получается теорема 3.4 и специальный признак равенства прямоугольных треугольников как ее частный случай.

Прямая и обратная теоремы

В математике многие теоремы «ходят парами». Очень часто встречаются пары, состоящие из **прямой** и **обратной** теорем.

Такую пару образуют, например, теорема о свойствах равнобедренного треугольника и теорема о признаках равнобедренного треугольника. Если же на эти теоремы посмотреть более внимательно, то мы увидим здесь четыре пары теорем. Вот одна из этих пар.



Прямая теорема

У равнобедренного треугольника углы при основании равны.

Обратная теорема

Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный. Его основанием является сторона, к которой прилежат равные углы.

То, что в прямой теореме служит условием (треугольник является равнобедренным), в обратной становится заключением. А то, что в прямой теореме требовалось доказать (равны углы при основании), в обратной становится условием.

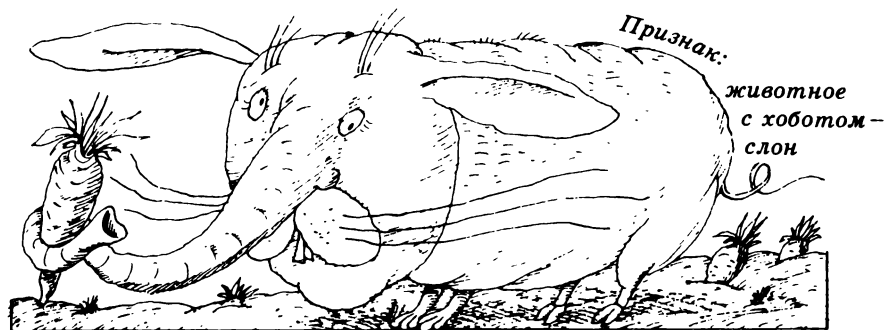
Заметим сразу, что справедливость прямой теоремы вовсе не означает справедливость обратной теоремы. Вот простейший пример.

Прямая теорема. *Вертикальные углы равны.* Условие — даны вертикальные углы. Требуется доказать, что они равны. **Обратная теорема** выглядит просто нелепо: если углы равны, то они вертикальные(?). Однако, если ее немного «подправить», то можно получить абсолютно верное, хотя и не очень интересное утверждение: *если два угла равны, то их можно расположить так, что они образуют пару вертикальных углов.*

Свойства и признаки

Но вернемся к паре теорем о свойствах и признаках равнобедренного треугольника. На самом деле нечто похожее есть в любой науке, хотя далеко не всегда соответствующие свойства и признаки приобретают такой же строгий смысл, как теорема в математике.

Возьмем, например, зоологию. У каждого вида животных имеются и свои свойства, и свои признаки, по которым этот вид можно



опознать. Хотя, конечно, редко бывает так, чтобы свойство являлось также и признаком. В качестве примера можно взять разве что слона. У слона имеется хобот (это свойство). Животное, имеющее хобот, является слоном (это признак).

Правда, хобот имеется и у некоторых пресмыкающихся (мягких черепах) и других животных, но это совсем «не тот» хобот.

Два приема в доказательстве одной теоремы

Теорема 3.5 о внешнем угле треугольника. На что здесь следует обратить внимание?

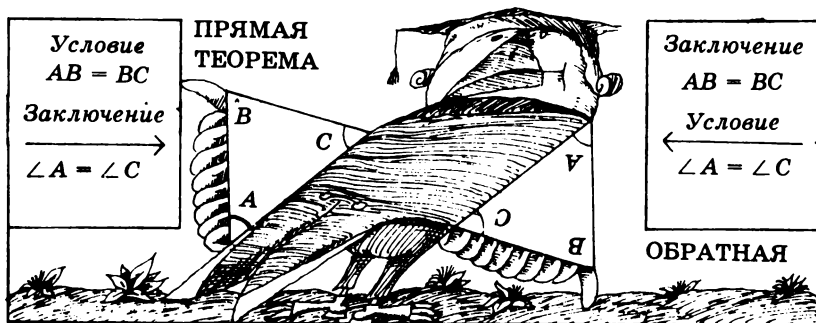
В геометрии, чтобы доказать, что одна величина меньше другой, часто прибегают к такому приему: рассматриваемые фигуры располагают так, чтобы одна фигура оказалась внутри другой. В данной теореме речь идет об углах. Дается способ, с помощью которого внутренний угол треугольника располагают внутри внешнего. Этот способ, кстати, основан на известном нам приеме — продолжении медианы.

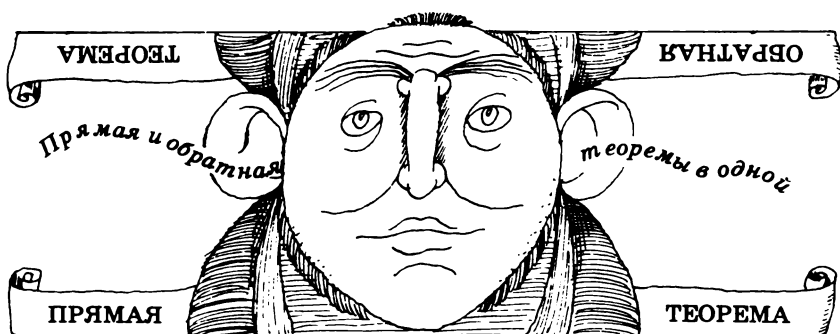
Прямая и обратная теоремы в одной

Теорема о внешнем угле треугольника позволяет сделать еще несколько шагов в развитии геометрической теории.

Теорема 3.6. Если вы вдумаетесь в ее формулировку, то заметите, что в ней заключены сразу две теоремы — прямая и обратная. В прямой мы идем от сторон к углам. В обратной, как и положено, идем в обратном направлении.

Прямую теорему мы сводим к предыдущей теореме о внешнем угле. Обратную теорему доказываем методом «от противного». Ис-





пользование метода «от противного» при доказательстве обратных теорем — типичное явление.

Теорема как частный случай другой теоремы

Частным случаем теоремы 3.6 является **теорема 3.7**, в которой сформулировано одно очень важное свойство перпендикуляра. А применяя результат теоремы 3.7 к окружности и касательной, мы получаем также важное свойство касательной.

Видите, сколько следствий мы получили из одной теоремы о внешнем угле, хотя сама она, как было сказано, скоро будет заменена более сильным утверждением.

Итак, мы закончили краткий обзор теорем, доказанных в предыдущих главах, методов рассуждений и доказательств, использовавшихся в этих теоремах.

А сейчас «докажем» две «теоремы». Эти «доказательства» должны предостеречь вас от некоторых опасностей, таящихся на пути познания и овладения геометрией.

Внимание! Чертеж!

Опасность первая: опора на неверный чертеж.

(??)Теорема.

В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна катету. (?)

(??)«Доказательство»¹. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C . Докажем, что гипоте-

¹ На самом деле теорема **не верна** и «доказательство» содержит ошибку.

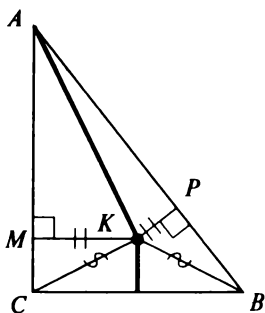


Рис. 116

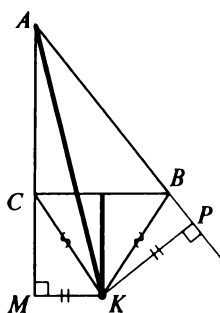


Рис. 117

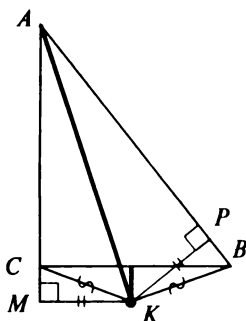


Рис. 118

нуза AB равна катету AC . Проведем биссектрису угла A и серединный перпендикуляр к BC (рис. 116). Обозначим через K точку их пересечения. Опустим из K перпендикуляры KM и KP на катет AC и гипотенузу AB .

Согласно свойству биссектрисы точка K равноудалена от AB и AC , т. е. $KM = KP$. Прямоугольные треугольники AKM и AKP равны: гипотенуза AK у них общая и $KM = KP$. Значит, $AM = AP$.

Треугольники CKM и BKP также равные прямоугольные: $CK = BK$, поскольку K лежит на серединном перпендикуляре к BC , и $KM = KP$. Значит, $CM = BP$.

В результате получаем $AC = AM + CM = AP + BP = AB$. Равенство доказано(?).

В чем дело? Вы скажете, что точка K должна быть вне треугольника ABC . Пожалуйста! На рисунке 117 проиллюстрировано «доказательство»(?) для этого случая.

Другое возражение кажется не очень разумным: как же мы доказываем равенство треугольников, когда совершенно очевидно, что они не могут быть равными. Один треугольник явно «меньше» другого, это хорошо видно на рисунке. Сделаем аккуратный чертеж (рис. 118).

Теперь все встало на свои места. Треугольники CKM и BKP в самом деле равны. Но отрезки CM и BP располагаются по разные стороны от BC . ▼

Короче говоря, верь глазам своим!

Четвертый признак равенства треугольников?

Вторая опасность: что-то прозевать. «Докажем» еще одно утверждение.

(??) Теорема.

Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, то такие треугольники равны.

Если вы помните пример, предшествовавший теореме 3.4, то должны удивиться. Ведь в этом примере показано, что такие треугольники вовсе не обязательно равны. И все же...

(??) «Доказательство». Построим треугольник AB_2C , равный треугольнику $A_1B_1C_1$, причем расположим точку B_2 по другую сторону от AC , чем точка B . Имеем $AB_2 = A_1B_1 = AB$, $CB_2 = C_1B_1$ (рис. 119).

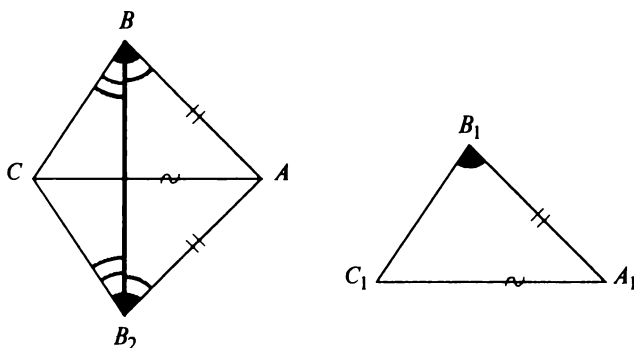


Рис. 119

В треугольнике BAB_2 стороны AB и AB_2 равны. Следовательно, равны и углы ABB_2 и AB_2B . Но так как по условию углы ABC и AB_2C равны ($\angle AB_2C = \angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$), то равными оказываются и углы CBB_2 и CB_2B . Значит, треугольник CBB_2 равнобедренный и $CB_2 = CB$. Теперь треугольники ABC и AB_2C оказываются равными по третьему признаку равенства треугольников, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Практически ничего не меняется, если точки A и C оказываются по одну сторону от прямой BB_2 (рис. 120).

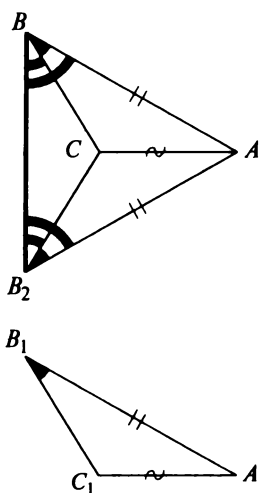


Рис. 120

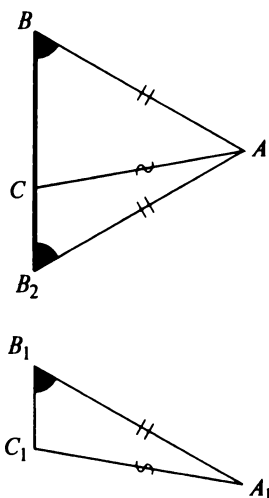


Рис. 121

А здесь в чем дело? Оказывается, что упущен один, на первый взгляд малозначительный, случай, когда точки B , B_2 и C оказываются на одной прямой (рис. 121). Именно в этом случае наши рассуждения и «не проходят». Углы $CB B_2$ и $CB_2 B$ обязательно равны, но они могут оказаться равными нулю. В этом случае «не работает» признак равнобедренного треугольника. ▼

Вывод: надо быть внимательным и бдительным. И это относится не только к случаям, подобным только что рассмотренному. Внимательным и бдительным надо быть постоянно. Все опасности заранее предусмотреть нельзя, и не только в геометрии.

Козьма Прутков в свое время сказал коротко и точно: «Бди!»

▲ ■ ● Задачи на доказательство

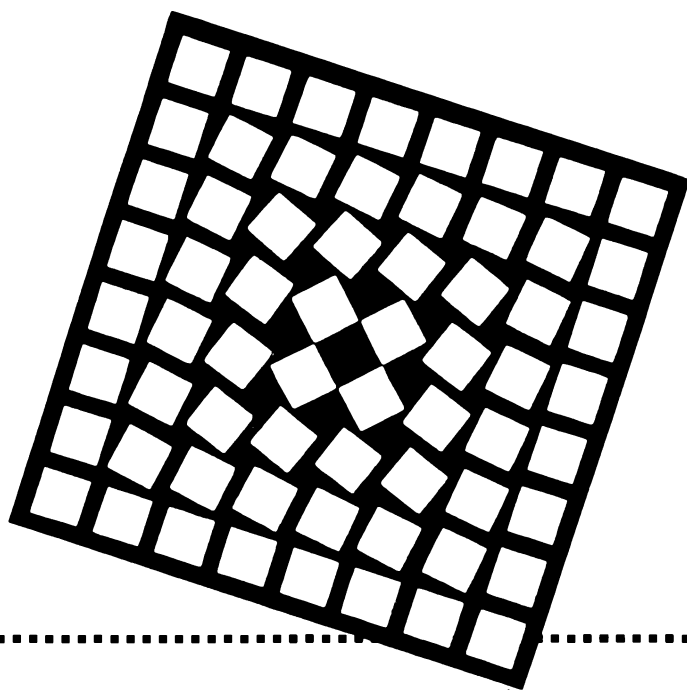
1. Вспомните понятия, связанные с многоугольниками.
2. Вспомните понятия, связанные с окружностью.
3. Вспомните понятия, связанные с треугольником.
4. Приведите примеры, когда обе теоремы — прямая и обратная — верны.

5. Приведите примеры, когда одна из двух теорем, прямая или обратная, верна, а другая — нет.
- 6(т). Докажите, что если фигура имеет ровно две оси симметрии, то эти оси перпендикулярны.
7. Может ли фигура иметь центр симметрии, но не иметь ни одной оси симметрии?
- 8(п). Докажите, что если у треугольника равны две высоты, то этот треугольник равнобедренный.
- 9(т). Докажите, что если для сторон треугольника выполняется неравенство $a + b \geq 3c$, то c — наименьшая сторона этого треугольника.
10. Докажите, что если в треугольнике ABC сторона AB в два раза больше стороны AC , то медиана, выходящая из вершины C , перпендикулярна биссектрисе угла A .
11. Докажите, что диагональ многоугольника меньше половины его периметра.
12. От данного многоугольника с помощью одного прямолинейного разреза отрезали некоторый многоугольник. Докажите, что периметр отрезанного многоугольника меньше периметра исходного многоугольника.
- 13(т). Внутри некоторого многоугольника содержится выпуклый многоугольник. Докажите, что периметр внутреннего многоугольника меньше периметра внешнего многоугольника.
- 14(т). Обозначим стороны треугольника ABC как обычно: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $2p = a + b + c$ — периметр треугольника (p — полупериметр). Докажите, что существуют три попарно касающиеся друг друга внешним образом окружности с центрами в вершинах треугольника, причем радиусы окружностей с центрами A , B и C соответственно равны $p - a$, $p - b$ и $p - c$.
- 15(т). Докажите, что существуют три попарно касающиеся друг друга окружности с центрами в вершинах треугольника ABC такие, что окружности с центрами B и C касаются друг друга внешним образом и обе они изнутри касаются окружности с центром A . При этом радиус окружности с центром A равен p , а окружности с центрами B и C имеют радиусы $p - c$ и $p - b$ соответственно (обозначения задачи 14).

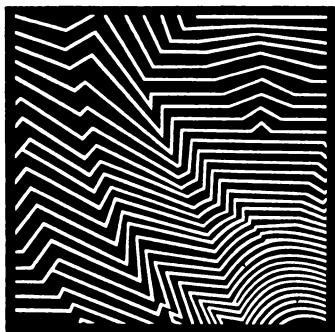
- 16(т).** Докажите, что если прямые AB , BC и AC касаются одной окружности с центром внутри треугольника ABC , то отрезки касательных от вершин A , B и C до точек касания равны соответственно $p - a$, $p - b$ и $p - c$ (обозначения задачи 14).
- 17(т).** Докажите, что если прямые AB , BC и CA касаются одной окружности с центром вне треугольника ABC , но внутри угла BAC , то отрезки касательных от вершин A , B и C до точек касания равны соответственно p , $p - c$ и $p - b$ (обозначения задачи 14).
- 18(т).** Пусть углы треугольника ABC равны $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle CBA = 60^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$. Пусть, далее, O — точка плоскости треугольника такая, что $AO = BO = CO$. Докажите, что $\angle OBC = \angle OCB = 50^\circ$, $\angle OCA = \angle OAC = 30^\circ$ и $\angle OBA = \angle OAB = 10^\circ$ (сравните с задачами 14 и 16).
- 19(т).** В вершинах четырехугольника $ABCD$ расположены центры окружностей. Известно, что любые две окружности с центрами в соседних вершинах касаются друг друга внешним образом. Докажите, что для сторон четырехугольника выполняется равенство $AB + CD = BC + DA$.
- 20(т).** Стороны четырехугольника $ABCD$ касаются одной окружности. (Точки касания — на сторонах четырехугольника.) Докажите, что $AB + CD = BC + DA$.
- 21(т).** Вершины четырехугольника $ABCD$ расположены на одной окружности. Докажите, что
- $$\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC.$$
- 22.** В треугольной пирамиде $ABCD$ имеют место равенства $AB = CD$, $AD = BC$. Докажите, что прямая, проходящая через середины AC и BD , перпендикулярна AC и BD .

Восьмой

класс



Параллельные прямые и углы



***В** этой главе вводится еще одно свойство плоскости, относящееся к параллельным прямым. Это последнее, принимаемое без доказательства утверждение. Все последующие факты будут строго доказываться. Лишь с появлением этого свойства изучаемая нами геометрия становится евклидовой геометрией, да и сама плоскость «получает право» называться евклидовой плоскостью. Здесь стоит заметить, что все доказанные ранее теоремы относятся к так называемой **абсолютной** геометрии, которую мы и будем изучать, но они верны и в геометрии Лобачевского, о которой мы лишь упомянем в этой главе.*

5.1. Параллельные прямые на плоскости

Во второй главе мы доказали, что через любую точку плоскости, расположенную вне данной прямой этой плоскости, можно провести прямую, параллельную этой прямой. При этом не обсуждался вопрос, нельзя ли провести через эту же точку еще какую-то прямую, параллельную данной. Впрочем, наверное, никто на это не обратил внимания, поскольку большинству школьников известно и очевидно, что более одной прямой провести нельзя. Именно этот факт мы и запишем в виде свойства 4.

Четвертое основное свойство плоскости

Свойство 4.

Через любую точку плоскости, расположенную вне данной прямой этой же плоскости, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Но прежде, чем начать обсуждать, какие следствия можно получить из этого свойства, остановимся на одном знаменательном моменте из многовековой истории геометрии.

Необходимо заметить, что рассматриваемое сейчас основное свойство плоскости существенно отличается от трех предыдущих. Оно допускает много различных формулировок. Некоторые из них совсем не похожи на приведенную. Однако при внимательном изучении можно заметить, что все эти формулировки равносильны друг другу.

Лобачевский и история открытия неевклидовой геометрии

В отличие от трех предыдущих свойств плоскости, свойство 4, а точнее, аксиома о параллельных прямых, казалось математикам не таким уж очевидным. Они, конечно, считали его верным, но не настолько бесспорным, чтобы принять без доказательства. И с глубокой древности до начала XIX столетия ученые неоднократно предпринимали попытки доказать это свойство, вывести его из других, более очевидных свойств.

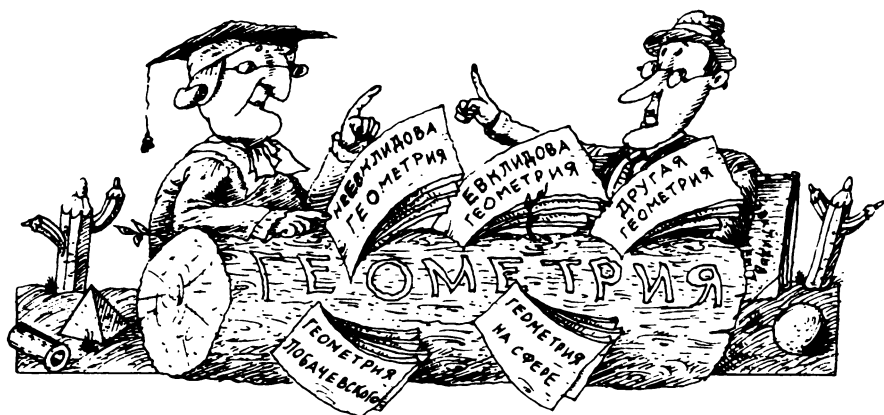
Указанное свойство пытались доказать методом от противного: предполагалось, что аксиома о параллельных неверна, и из этого делался ряд выводов. Было накоплено много интересных геометриче-

ских фактов, доказан ряд теорем, которые были верны при таком предположении. Но никто из ученых не мог допустить и мысли о том, что кроме геометрии Евклида существует какая-то иная геометрия. Поэтому все эти попытки завершались тем, что в каком-то месте явно или неявно использовалось утверждение, равносильное аксиоме о параллельных, в результате чего и обнаруживалось «противоречие».

И вот в первой половине XIX в. эти попытки увенчались успехом, а вернее ... полным неуспехом. Была создана новая геометрическая система, в которой через любую точку плоскости, расположенную вне данной прямой этой плоскости, можно провести более одной прямой, не пересекающейся с данной (т. е. параллельной данной). Эта геометрическая система называется *неевклидовой геометрией* и носит имя Лобачевского.

23 февраля 1826 г. на заседании физико-математического отделения Императорского Казанского университета тридцатитрехлетний профессор Николай Иванович Лобачевский выступил с докладом «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных прямых». Этот день и стал днем рождения неевклидовой геометрии, началом новой эпохи в развитии геометрии.

В истории науки нередки случаи, когда открытия практически одновременно делались несколькими учеными. Независимо от Лобачевского существование новой геометрической системы установили великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс и венгр Янош Бolyai (Бойаи). Однако Гаусс, боясь быть непонятым, не опубликовал свое открытие. Бolyai же изложил свои результаты в



виде приложения к обширному геометрическому трактату своего отца, вышедшему в 1832 г.

Но если вы думаете, что ученый мир с восторгом и благодарностью принял новую геометрию, то очень и очень ошибаетесь. К сожалению, судьбы первооткрывателей далеко не всегда оказываются счастливыми. Так было и в этом случае. Гениальный Гаусс, по существу, отрекся от своего открытия. Для Яноша Больяи непризнание его работ стало причиной большой личной трагедии, он бросил занятия математикой и до конца жизни так и не оправился от полученного удара.

До дна испил горькую чашу непонимания и невежественной критики и Николай Иванович Лобачевский. И все же он упорно продолжал изучать созданную им геометрию, издав ряд работ, в которых развивались основы, изложенные в его первой работе. Ровно через 30 лет после своего исторического доклада Лобачевский скончался непризнанным и почти всеми забытым. И лишь 10 лет спустя работы Лобачевского стали известными и его идеи получили признание. А в 1992 г. двухсотлетие со дня рождения великого русского математика торжественно отмечалось во всем мире.

Признаки и свойства параллельных прямых

Рассмотрим прямую l и точку A вне этой прямой. Проведем через A произвольную прямую, пересекающую прямую l в некоторой точке B (рис. 122). Обозначим через β один из углов, образованных AB с прямой l . Проведем через A прямую t такую, что угол α дополнял бы до 180° угол β , т. е. $\alpha + \beta = 180^\circ$. Построенная прямая t параллельна прямой l .

Докажем это. Предположим, что прямые t и l пересекаются. Обозначим точку пересечения через C . Тогда в треугольнике ABC внешний угол при вершине A равен внутреннему углу при вершине B .

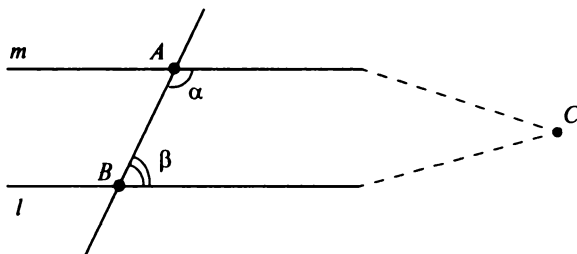
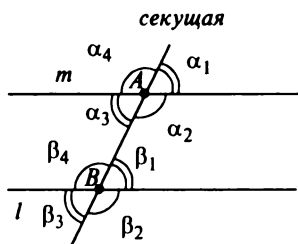
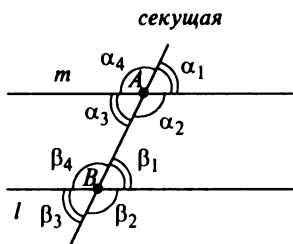


Рис. 122



Односторонние углы:
внутренние β_1 и α_2 , β_4 и α_3
внешние β_2 и α_1 , β_3 и α_4

Рис. 123



Соответственные углы:
 β_1 и α_1 , β_2 и α_2
 β_3 и α_3 , β_4 и α_4

Рис. 124

(Это следует из того, что сумма внутренних углов A и B этого треугольника равна 180° .) Получено противоречие с теоремой о внешнем угле треугольника (теорема 3.5)¹.

Заметим, что углы, образовавшиеся при пересечении прямых t и l прямой AB , расположенные между t и l по одну сторону от AB , называются **внутренними односторонними углами**. (Прямую AB , чтобы отличить ее от прямых t и l , иногда называют **секущей**.) Кроме того, среди образовавшихся углов можно выделить пары **внешних односторонних углов**. (Что это за пары, понятно из рисунка 123.) И наконец, образовавшиеся углы можно разбить на четыре пары **соответственных** углов (рис. 124).

Сформулируем теперь полностью признаки параллельности двух прямых, непосредственно следующие из наших предшествующих рассуждений.

Признаки параллельных прямых.

Если при пересечении двух прямых третьей (секущей) углы, образующие какую-то пару соответственных углов, равны, или же углы, образующие какую-то пару внутренних или внешних односторонних углов, дают в сумме 180° , то эти прямые параллельны.

Но через каждую точку плоскости можно провести лишь одну прямую, параллельную данной. Поэтому сформулированный при-

¹ Внешний угол треугольника больше любого не смежного с ним внутреннего.

знак параллельности является одновременно и свойством параллельных прямых.

Свойства параллельных прямых.

При пересечении двух параллельных прямых третьей (секущей) все соответственные углы попарно равны, а пары внутренних или внешних односторонних углов образованы из углов, дополняющих друг друга до 180° .

Параллельность двух прямых можно для краткости обозначить знаком \parallel .

Сумма углов треугольника

Следствием доказанных нами утверждений является теорема о сумме углов треугольника.

Теорема 5.1.

Сумма углов в любом треугольнике равна 180° .

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и проведем через вершину B прямую, параллельную AC (рис. 125). Имеем $\angle KBM = \angle BAC$, поскольку эти углы являются соответственными, образованными при пересечении параллельных CA и BM секущей AB . Равными являются также углы $\angle ACB$ и $\angle CBM$, так как угол, вертикальный к $\angle CBM$, является соответственным для $\angle ACB$ (здесь секущей является AB).

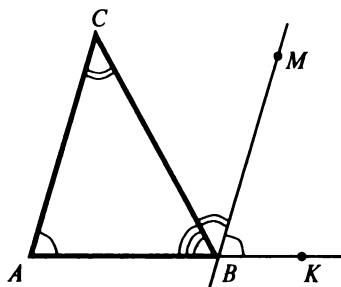


Рис. 125

Таким образом,
 $\angle CAB + \angle ACB + \angle ABC =$
 $= \angle MBK + \angle MBC + \angle ABC = 180^\circ. \blacktriangledown$

Из теоремы 5.1 сразу следует, что *внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных.* (Сравните это утверждение с ранее доказанной теоремой о внешнем угле треугольника.)

Сумма углов n -угольника

Зная сумму углов треугольника, легко получить формулу для суммы углов любого n -угольника.

Рассмотрим, например, выпуклый семиугольник (рис. 126). Соединим какую-либо его вершину диагоналями со всеми остальными вершинами. В результате семиугольник разобьется на пять треугольников, сумма углов которых и дает искомую сумму, т. е. сумма углов этого семиугольника равна $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$.

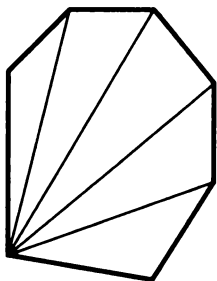


Рис. 126

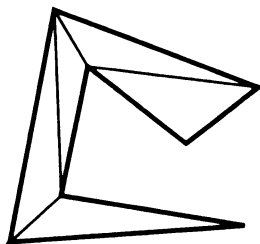


Рис. 127

Таким же образом можно поступить и с любым выпуклым n -угольником. Сумма его углов равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Невыпуклый многоугольник нельзя так просто разбить на треугольники. Тем не менее, формула для суммы его углов остается прежней. (На рисунке 127 показан пример разбиения невыпуклого семиугольника.) Запишем это в виде теоремы.

Теорема 5.2.

Сумма углов любого n -угольника равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

1. Что вы можете сказать по поводу утверждения, что в геометрии Лобачевского параллельные прямые пересекаются?
2. Известно, что при пересечении прямых a и b третьей прямой образовалось восемь углов. Четыре из них равны по 80° , а четыре других — по 100° . Следует ли из этого, что прямые a и b параллельны?
- 3(в). Докажите, что если каждая из прямых a и b параллельна прямой c , то прямые a и b параллельны.
- 4(в). Найдите углы равностороннего треугольника.

- 5(в).** Докажите, что если в прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 30° , то противолежащий этому углу катет в два раза меньше гипотенузы.
- 6.** Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен: а) 100° ; б) 80° .
- 7.** Докажите, что если биссектриса одного из внешних углов треугольника параллельна противоположной стороне треугольника, то этот треугольник равнобедренный.
- 8(п).** Найдите сумму внешних углов: а) треугольника; б) выпуклого четырехугольника; в) выпуклого одиннадцатиугольника; г) выпуклого многоугольника.
- 9(п).** Из точки O плоскости выходят три луча, на которых взяты точки A , B и C так, что $OA = OB = OC$. Известно также, что $\angle AOB = 70^\circ$, $\angle BOC = 160^\circ$, $\angle COA = 130^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .
- 10(п).** В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. На продолжении стороны AB за точку B взята точка D так, что $BD = AB$. Докажите, что угол $ACD = 90^\circ$.
- 11.** Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его внешних углов равен: а) 80° ; б) 100° .
- 12(в).** Внутри угла, величина которого равна 40° , взята точка A , из которой опущены перпендикуляры AB и AC на стороны угла. Найдите угол BAC .
- 13(п).** На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку A взята точка K так, что $AK = AC$, а на ее же продолжении за точку B взята точка M так, что $BM = BC$. Найдите углы треугольника MKC , если: а) $\angle BAC = 70^\circ$; $\angle ABC = 80^\circ$; б) $\angle BAC = \alpha$; $\angle ABC = \beta$.
- 14(п).** Докажите, что если в треугольнике ABC медиана, выходящая из вершины A , в два раза меньше стороны BC , то $\angle BAC = 90^\circ$.
- 15(п).** Докажите, что если AB — диаметр окружности, а M — произвольная точка на окружности, не совпадающая с A , то $\angle AMB = 90^\circ$.
- 16.** Найдите углы треугольника ABC , если известно, что биссектриса AD равна AC , и, кроме того, $AD = DB$.
- 17(т).** Найдите углы треугольника ABC , если известно, что биссектриса угла A делит этот треугольник на два равнобедренных треугольника.

- 18(в).** Постройте угол в 60° , 30° , 15° .
- 19(т).** В треугольнике ABC сторона $AB = 2$, а углы A и B равны соответственно 60° и 70° . На стороне AC взята точка D так, что $AD = 1$. Найдите углы треугольника BDC .
- 20.** Угол ABC равен α . Чему равен угол KPM , если прямая PK параллельна BA , а прямая PM параллельна BC ?
- 21.** На плоскости проведены три луча OA , OB и OC . Три прямые, соответственно перпендикулярные этим лучам, образуют треугольник. Найдите углы этого треугольника, если:
а) $\angle BOA = 100^\circ$, $\angle AOC = 110^\circ$, $\angle COB = 150^\circ$; б) $\angle AOB = 40^\circ$, $\angle BOC = 30^\circ$, $\angle COA = 70^\circ$.
- 22(т).** Найдите сумму отмеченных углов пятиконечной звезды, изображенной на рисунке 128.
- 23(пт).** Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O . Найдите угол BOC , если $\angle BAC = \alpha$.
- 24.** Найдите углы треугольника, стороны которого лежат на прямых, если углы между прямыми равны 20° , 30° и 50° .
- 25.** Центры трех попарно касающихся друг друга внешним образом окружностей расположены в точках A , B и C , $\angle ABC = 90^\circ$. Точки касания K , P и M ; точка P находится на стороне AC . Найдите угол KPM .
- 26(пт).** Стороны треугольника ABC касаются некоторой окружности в точках K , P и M , причем точка P расположена на стороне AC . Найдите угол KPM , если $\angle ABC = 2\alpha$.
- 27(т).** Докажите, что у выпуклого многоугольника может быть не более трех острых углов.
- 28(т).** Для выпуклого четырехугольника $ABCD$ выполняются следующие условия: $AB = BC$, $CD = DA$. На отрезках AD и BD взяты точки M и K так, что $\angle MKD = \angle BCK$. Найдите $\angle AKM$, если $\angle ABC = 2\alpha$.
- 29(т).** Две прямые пересекаются в точке O . Рассмотрим ломаную $OA_1A_2A_3A_4A_5$ с вершинами на данных прямых и равны-

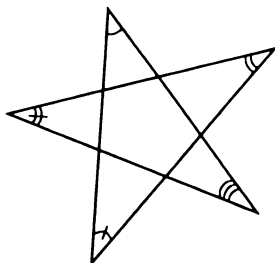


Рис. 128

ми сторонами ($OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$). Найдите углы треугольника OA_4A_5 , если угол между данными прямыми равен: а) 20° ; б) 70° . Для пункта а) найдите также углы треугольника $A_1A_4A_5$.

30(т). Биссектриса угла, смежного с углом C треугольника ABC , пересекает продолжение стороны AB за точку B в точке D , а биссектриса угла, смежного с углом A , пересекает продолжение BC за точку C в точке E . Известно, что $DC = CA = AE$. Найдите углы треугольника ABC .

31. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол ACB_1 . Найдите также угол KPM , где K, P и M — соответственно середины ребер AA_1, A_1B_1, B_1C_1 (рис. 129).

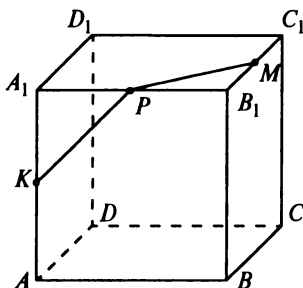


Рис. 129

5.2. Измерение углов, связанных с окружностью

В основе большинства утверждений, доказываемых в этом параграфе, лежит свойство внешнего угла треугольника: внешний угол равен сумме двух внутренних, с ним не смежных. Особое значение имеет частный случай этого свойства внешнего угла: **внешний угол при вершине равнобедренного треугольника вдвое больше каждого из углов при основании** (рис. 130).

Для того чтобы было можно перейти к основным утверждениям, нам необходимо ввести одно новое понятие.

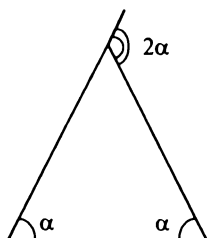


Рис. 130

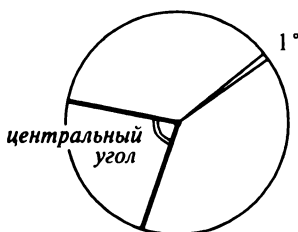


Рис. 131

Центральный угол в окружности

Центральным углом по отношению к заданной окружности мы будем называть любой угол с вершиной в центре этой окружности.

Любому центральному углу соответствует дуга окружности. И, наоборот, любой дуге окружности соответствует центральный угол. Правда, при этом рассматриваемые углы могут быть больше 180° (рис. 131).

Дуги окружности, как и углы, можно измерять в градусах. Градусная мера всей окружности равна 360° . Одному градусу соответствует дуга, равная $\frac{1}{360}$ окружности. Теперь мы можем сказать, что центральный угол измеряется соответствующей дугой окружности.

Вписанный угол. Измерение вписанного угла

Вписанным углом окружности мы будем называть угол, вершина которого расположена на окружности, а стороны пересекают окружность (рис. 132).

Рассмотрим сначала вписанный угол, одна из сторон которого проходит через центр окружности (рис. 133). Итак, сторона BC угла ABC является диаметром окружности. Центральный угол AOC — внешний угол равнобедренного треугольника AOB . Значит, $\angle AOC = 2\angle ABC$. Таким образом, вписанный угол ABC в этом случае равен половине соответствующего центрального угла и измеряется половиной дуги окружности, расположенной внутри угла ABC , иначе говоря, половиной дуги, на которую он опирается.

Оказывается, это же верно для любого вписанного угла.

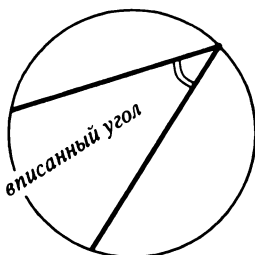


Рис. 132

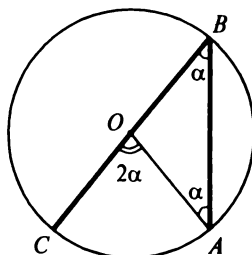


Рис. 133

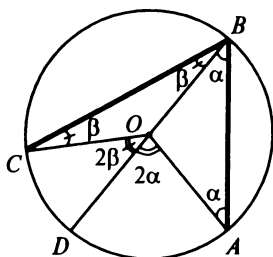


Рис. 134

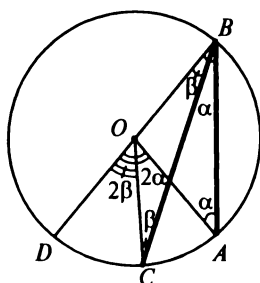


Рис. 135

Теорема 5.3.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Доказательство. Доказательство этой теоремы легко сводится к уже рассмотренному случаю, когда одна из сторон угла проходит через центр окружности.

Рассмотрим вписанный угол ABC . Проведем диаметр BD . Возможны два случая расположения этого диаметра относительно угла ABC .

Первый случай. Диаметр BD проходит внутри угла (рис. 134). Тогда угол ABC равен сумме углов ABD и DBC , каждый из которых измеряется половиной соответствующей дуги AD и DC . Значит, весь угол ABC измеряется половиной дуги AC , заключенной внутри угла, т. е. половиной дуги, на которую он опирается.

Второй случай. Диаметр BD проходит вне угла. Пусть точка D расположена так, как на рисунке 135. Тогда угол ABC равен разности углов ABD и CBD , каждый из которых измеряется половиной соответствующей дуги AD и CD . И в этом случае получаем, что угол ABC измеряется половиной дуги AC , расположенной внутри угла. ▼

Особое значение имеет частный случай теоремы 5.3.

Теорема 5.4.

В любой окружности вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90° (рис. 136).

Доказательство. В самом деле, в этом случае внутри угла находится половина окружности, т. е. дуга в 180° , тогда опирающийся на нее угол равен 90° . ▼

Из теоремы 5.3 и свойства внешнего угла вытекают теоремы об измерении углов, различным образом расположенных относительно окружности.

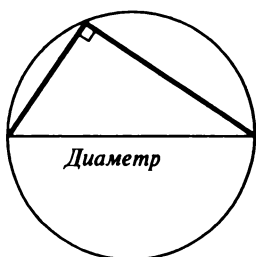


Рис. 136

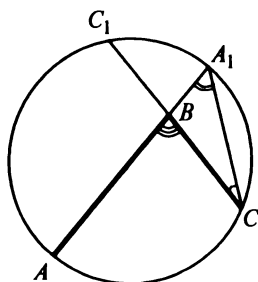


Рис. 137

Угол с вершиной внутри круга

Теорема 5.5.

Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых расположена внутри этого угла, а другая — внутри угла, вертикального к данному.

Доказательство. Рассмотрим угол с вершиной B внутри круга, A и C — точки пересечения его сторон с окружностью, а A_1 и C_1 — вторые точки пересечения прямых AB и CB с окружностью (рис. 137). Угол ABC является внешним углом треугольника A_1BC . Значит,

$$\angle ABC = \angle AA_1C + \angle C_1CA_1.$$

Но по теореме 5.4 каждый из углов в правой части этого равенства измеряется половиной соответствующей дуги: AC и A_1C_1 . Таким образом, угол ABC измеряется полусуммой дуг AC и A_1C_1 . ▼

Угол с вершиной вне круга

Теорема 5.6.

Угол, вершина которого расположена вне круга, а каждая из сторон пересекает окружность в двух точках, измеряется полуразностью дуг, заключенных внутри угла.

Доказательство. Пусть стороны угла с вершиной в точке B пересекаются с окружностью в точках A и A_1 , C и C_1 , причем C_1 и A_1 — ближай-

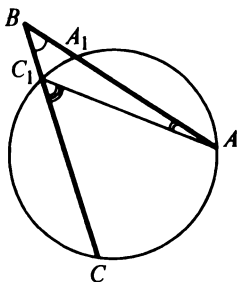


Рис. 138

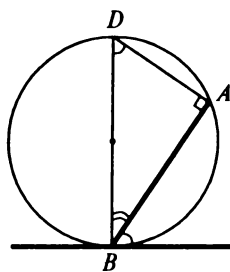


Рис. 139

шие к вершине точки пересечения (рис. 138). Рассмотрим треугольник ABC_1 . Угол AC_1C — внешний угол этого треугольника. Значит,

$$\angle AC_1C = \angle ABC + \angle BAC_1,$$

откуда $\angle ABC = \angle AC_1C - \angle A_1AC_1$. Но углы в правой части последнего равенства измеряются половинами соответствующих дуг AC и A_1C_1 . Следовательно, полуразностью этих дуг измеряется и данный угол ABC . ▼

Для полноты картины нам потребуется еще одна теорема.

Угол между касательной и хордой

Теорема 5.7.

Угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной внутри этого угла.

Доказательство. Рассмотрим меньший из углов между хордой AB и касательной к окружности в точке B (рис. 139). Пусть BD — диаметр окружности. Поскольку BD перпендикулярен к касательной, угол ABD дополняет до 90° рассматриваемый угол между хордой AB и касательной. Но по теореме 5.4 угол BAD прямой. Значит, угол ADB также дополняет до 90° угол ABD . Таким образом, рассматриваемый угол равен углу ADB и измеряется (по теореме 5.3) половиной указанной дуги.

Для полноты доказательства надо рассмотреть и второй — больший угол между AB и касательной. Этот угол — смежный с рассмотренным — дополняет его до 180° и измеряется половиной большей дуги, задаваемой хордой AB . ▼

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

.....

1. Точки A , B и C делят окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как $2 : 3 : 7$. Найдите углы треугольника ABC .
2. Точки A , B и C делят окружность на три дуги, причем дуга AB на 40° меньше дуги BC , но на 70° больше дуги AC . Найдите углы треугольника ABC .
3. Точки A , B и C , лежащие на окружности, служат вершинами равностороннего треугольника. На окружности взята точка D , причем точки C и D расположены по разные стороны от прямой AB . Найдите угол ADB .
- 4(в). Угол ABC вписан в окружность. Докажите, что биссектриса этого угла делит дугу AC пополам.
- 5(в). В окружность радиуса 1 вписан угол ABC , равный 30° . Чему равна хорда AC ?
- 6(п). Вершины четырехугольника $ABCD$ расположены на окружности. Докажите, что сумма двух противоположных углов этого четырехугольника равна 180° .
7. Найдите углы четырехугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, если $\angle ABD = 74^\circ$, $\angle DBC = 38^\circ$, $\angle BDC = 65^\circ$.
- 8(в). На окружности строится последовательность точек: первая точка берется произвольно, а начиная со второй, каждая следующая удалена от предыдущей на расстояние, равное радиусу окружности. Докажите, что седьмая точка совпадает с первой.
- 9(в). На плоскости даны две точки A и B . Только с помощью циркуля постройте две точки, расстояние между которыми равно $2 AB$.
10. Окружность касается одной из сторон угла в его вершине — точке A и пересекает другую сторону в точке B . Величина угла равна 40° ; M — точка на меньшей дуге AB . Найдите угол AMB .
- 11(т). Диагонали четырехугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, пересекаются в точке M . Известно, что $\angle ABC = 72^\circ$, $\angle BCD = 102^\circ$, $\angle AMD = 110^\circ$. Найдите $\angle ACD$.
- 12(т). Диагонали четырехугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, пересекаются в точке M , $\angle AMB = 80^\circ$.

Прямые AB и CD пересекаются в точке K , причем $\angle AKD = 20^\circ$, а прямые BC и DA — в точке N , $\angle ANB = 40^\circ$. Найдите углы четырехугольника $ABCD$. Сколько решений имеет задача?

- 13(п).** На окружности отмечены точки: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$. Эти точки соединены так, как показано на рисунках 140 и 141. Чему равны суммы отмеченных семи углов в каждом случае?

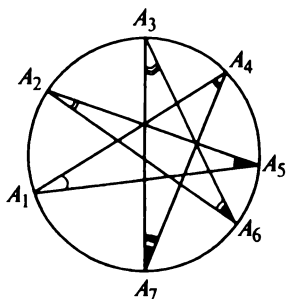


Рис. 140

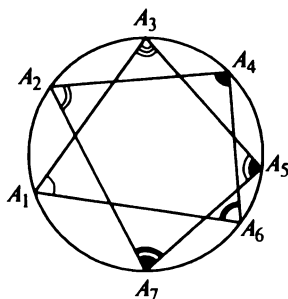


Рис. 141

- 14(т).** В окружности с центром O проведен диаметр; A и B — точки окружности, расположенные по одну сторону от этого диаметра. На диаметре взята точка M такая, что AM и BM образуют равные углы с диаметром. Докажите, что $\angle AOB = \angle AMB$.
- 15(т).** В четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны. Точки A, C и D расположены на окружности, касающейся AB и CB . Угол ABC равен 120° , а высота треугольника ACD , опущенная на сторону AD , равна 1. Найдите DC .
- 16(п).** Две окружности касаются друг друга в точке A . Произвольная прямая, проходящая через A , вторично пересекает одну окружность в точке B , а другую — в точке C . Докажите, что центральные углы этих окружностей, соответствующие хордам AB и AC , равны.
- 17(п).** Две окружности пересекаются в двух точках. Через одну из точек их пересечения проведена прямая, пересекающая одну окружность в точке A , а другую — в точке B . Через вторую точку пересечения окружностей проведена еще одна прямая, пересекающая первую окружность в точке C , а вторую — в точке D . Докажите, что прямые AC и BD параллельны. (Точки A, B, C, D отличны от точек пересечения окружностей.)

5.3. Задачи на построение и геометрические места точек

В начале этого параграфа будут рассмотрены задачи на построение. Они не являются для вас новыми, мы их уже решали. Дело в том, что те несколько шагов в развитии геометрической теории, сделанные в этой главе, дают возможность предложить более короткие решения этих задач.

Построение перпендикуляра к прямой

Задача 1. Дана прямая l и точка A на ней. Постройте в этой плоскости прямую, проходящую через A и перпендикулярную l .

Построение. Предлагаемое построение основывается на теореме 5.4 о вписанном угле, опирающемся на диаметр. Проводим через A любую окружность с центром вне прямой l (рис. 142). Через точку B — вторую точку пересечения этой окружности с прямой l — проводим диаметр BC . Тогда прямая AC и будет искомым перпендикуляром, поскольку вписанный угол BAC опирается на диаметр и, следовательно, равен 90° . ▼

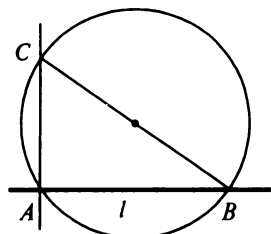


Рис. 142

Как видим, это построение очень экономно: потребовалось провести всего три линии. Третьей являлся искомым перпендикуляр. Можно показать, что меньшим числом линий обойтись нельзя.

Такое же число линий нам потребовалось для проведения перпендикуляра через точку вне прямой, поэтому мы можем сказать, что задача о наиболее экономном построении прямой, перпендикулярной данной и проходящей через любую точку плоскости, решена полностью.

Теперь рассмотрим задачу о построении касательной к окружности.

Построение касательной

Задача 2. Дана окружность с центром в точке O и точка A вне ее. Постройте прямую, проходящую через A и касающуюся окружности.

Построение. Построим на отрезке OA как на диаметре окружность (рис. 143). Для этого надо сначала разделить OA пополам. Середина OA будет центром этой окружности. Построенная окруж-

ность пересечется с данной в двух точках B и B_1 , которые являются точками касания искомым касательных. Это следует из того, что угол OBA (а также $\angle OB_1A$), как опирающийся на диаметр, равен 90° , а прямая, перпендикулярная радиусу и проходящая через его конец, лежащий на окружности, как мы знаем, является касательной к окружности. ▼

Прежде чем перейти к следующей задаче, докажем простую, но очень важную и полезную теорему.

Существование окружности, проходящей через три точки. Описанная окружность

Теорема 5.8.

Через любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную окружность.

Доказательство. Рассмотрим три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой. Построим серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC . Эти серединные перпендикуляры пересекутся в некоторой точке O (рис. 144). Понятно, что они не могут быть параллельными, поскольку перпендикуляры к параллельным прямым также параллельны или совпадают, а прямые AB и BC пересекаются. Точка O равноудалена от точек A и B , а также от B и C , т. е. она равноудалена от A , B и C . Значит, окружность с центром в O проходит через точки A , B и C . Эта окружность единственная, так как две окружности могут пересекаться не более, чем в двух точках. ▼

Окружность, проходящая через вершины треугольника, называется *описанной около этого треугольника* (рис. 145).

Теорема 5.8 утверждает, что у *любого треугольника существует и притом единственная описанная окружность*.

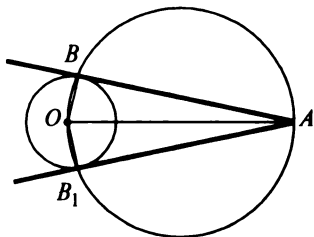


Рис. 143

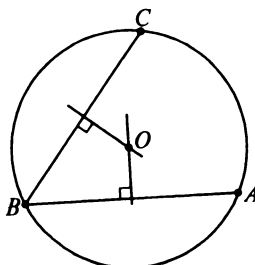


Рис. 144



Рис. 145

Четыре точки на одной окружности

При решении некоторых задач может оказаться полезной следующая теорема.

Теорема 5.9.

Если для четырех точек плоскости A, B, M и K выполняется одно из следующих двух условий:

а) точки M и K расположены по одну сторону от прямой AB и при этом $\angle AMB = \angle AKB$;

*б) точки M и K расположены по разные стороны от прямой AB и при этом $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$,
то точки A, B, M и K лежат на одной окружности.*

Доказательство. а) Проведем окружность через точки A, B и M (см. теорему 5.8). Эта окружность должна пройти через точку K (рис. 146). В самом деле, точка K не может находиться внутри этой окружности, поскольку в этом случае, согласно теореме 5.5, угол AKB измерялся бы половиной суммы дуги AB и еще какой-то дуги, т. е. был больше угла AMB . (Этот угол по теореме 5.3 измеряется половиной дуги AB .)

Точка K не может располагаться и вне этой окружности, так как в этом случае угол AKB был бы меньше угла AMB (см. теорему 5.6).

Итак, точка K обязательно должна лежать на окружности, проходящей через точки A, B и M .

б) Этот случай легко свести к случаю а). Для этого, проведя через точки A, B и M окружность, возьмем на дуге, не содержащей точки M , точку M_0 (рис. 147). Сумма углов AMB и AM_0B измеряется по-

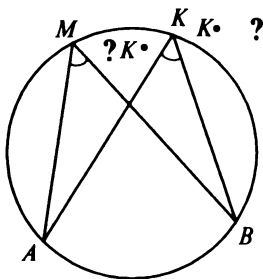


Рис. 146

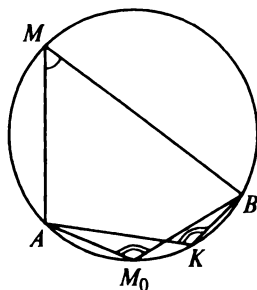


Рис. 147

ловиной всей окружности. Значит, $\angle AMB + \angle AM_0B = 180^\circ$. Теперь из условия б) следует, что $\angle AM_0B = \angle AKB$, и мы пришли к предыдущему случаю. ▼

Особенно важную роль играет частный случай теоремы 5.9, который мы даже запишем в виде отдельной теоремы.

Теорема 5.10.

Если $\angle AMB = \angle AKB = 90^\circ$, то точки A, B, M и K расположены на окружности с диаметром AB (рис. 148).

Как видите, в этой теореме два случая слились в один: точки M и K могут располагаться как по одну, так и по разные стороны от прямой AB .

Дуга, вмещающая данный угол

На основании теоремы 5.9 легко решается следующая задача.

Задача 3. На плоскости даны две точки A и B . Найдите геометрическое место точек M плоскости, расположенных по одну сторону от прямой AB , и таких, что угол $\angle AMB = \alpha$, где α — заданный угол.

Решение. В соответствии с теоремой 5.9 все нужные точки M должны располагаться на дуге окружности, проходящей через точки A и B .

Для построения этой дуги достаточно найти хотя бы одну точку M , для которой $\angle AMB = \alpha$. Предложим такое построение (рис. 149). Построим угол, равный углу α , так, чтобы вершина угла была в точке A , а одна из сторон угла была лучом AB . Пусть $\angle BAC = \alpha$. Постро-

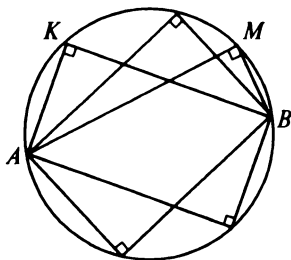


Рис. 148

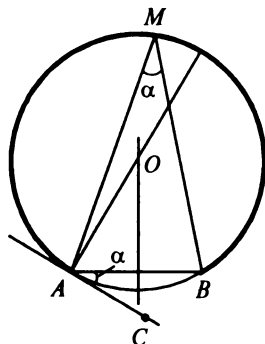


Рис. 149

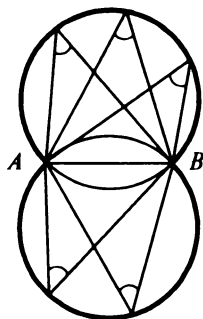


Рис. 150

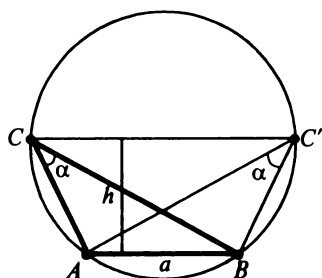
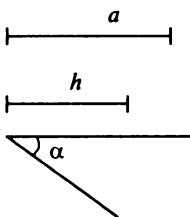


Рис. 151

им теперь серединный перпендикуляр к AB и прямую, перпендикулярную AC и проходящую через A . Точка пересечения этих перпендикуляров — точка O — и будет центром искомой окружности. Это следует из теоремы 5.7.

Если же в условии задачи снять требование, чтобы точки M располагались по одну сторону от AB , то соответствующее геометрическое место точек будет состоять из двух дуг, симметричных относительно прямой AB . Строго говоря, концы этих дуг — сами точки A и B — в рассматриваемое геометрическое место не входят (рис. 150). ▼

Как мы уже говорили, теоремы 5.9 и 5.10 и геометрическое место точек, рассмотренное в последней задаче, могут быть использованы при решении различных геометрических задач.

Метод геометрических мест в задачах на построение

Сейчас мы обсудим один из самых распространенных методов решения задач на построение — метод геометрических мест точек.

Задача 4. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к этой стороне, и противолежащему углу.

Решение. Итак, нам даны два отрезка a и h , один из которых равен стороне треугольника, а другой — его высоте, опущенной на эту сторону, и угол α , равный противолежащему данной стороне углу треугольника.

Построим в любом месте на плоскости отрезок $AB = a$ (рис. 151). Вершина C искомого треугольника должна располагаться на прямой, параллельной AB , проходящей на расстоянии h от AB . Иными словами, C принадлежит геометрическому месту точек, уда-

ленных на расстояние h от прямой AB , а это геометрическое место точек есть прямая, параллельная AB . (Мы рассматриваем лишь точки по одну сторону от AB .)

В то же время, если не учитывать высоту, то вершина S лежит на дуге с концами A и B , вмещающей данный угол α . Построив эти прямую и дугу, мы найдем точку C как точку пересечения прямой и окружности. Таких точек может быть две. Но им соответствуют два равных треугольника и выбрать можно любой из них. В случае касания такой треугольник один. Построенные прямая и дуга могут и не пересекаться. В этом случае задача не имеет решения. ▼

Как видим, суть метода, а это и есть **метод геометрических мест точек**, довольно проста. Сначала задача сводится к нахождению какой-либо точки плоскости. Эта точка определяется как точка пересечения двух линий. Отбрасывая одно условие (в рассмотренном случае угол), мы получаем, что искомая точка должна принадлежать одному геометрическому месту точек (в данном случае — прямой линии). Отбрасывая другое условие (заданную высоту), мы получаем, что эта же точка должна принадлежать другому геометрическому месту точек (дуге окружности). Построив эти геометрические места, найдем искомую точку как точку их пересечения (рис. 152).

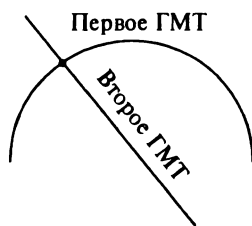


Рис. 152

Известное всем простейшее построение треугольника по трем сторонам также осуществляется методом геометрических мест. (Объясните почему.) Впрочем, в любой задаче на построение этот метод так или иначе присутствует.

▲■● Задачи, задания, вопросы

-
- 1(в). Даны две точки A и B на плоскости. Найдите геометрическое место точек M плоскости, из которых отрезок AB виден под тупым углом. (Это означает, что угол AMB тупой.)
 - 2(п). Постройте треугольник по медиане и углам, которые она образует с двумя заключающими ее сторонами.

- 3(т). Дан треугольник с тупым углом. Найдите геометрическое место точек плоскости, из которых данный треугольник виден под прямым углом.
- 4(т). Постройте треугольник по медиане и двум углам.
- 5(в). Найдите геометрическое место точек M плоскости таких, что касательная, проведенная из M к данной окружности, равна данному отрезку.
6. На прямой расположены два равных отрезка AB и CD . Найдите геометрическое место точек плоскости, из которых эти отрезки видны под равными углами.
7. На плоскости даны два отрезка AB и CD . Найдите геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под углом 20° , а отрезок CD — под углом 30° . Может ли искомое геометрическое место содержать более четырех точек?
- 8(в). Постройте треугольник по стороне, противоположному углу и медиане, проведенной к данной стороне.
- 9(в). Постройте треугольник по стороне, медиане и высоте, проведенным к данной стороне.
- 10(т). На плоскости даны точки A и K . Найдите геометрическое место точек B плоскости, для которых найдется точка C такая, что в треугольнике ABC угол BAC равен 90° , и AK является медианой.
- 11(п). Концы отрезка постоянной длины перемещаются по двум перпендикулярным прямым. Какую линию описывает середина этого отрезка?
- 12(т). На окружности даны точки A и B . Две точки C и D перемещаются по окружности так, что хорда CD остается постоянной. Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AC и BD .
- 13(пт). Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Возьмем на этой прямой точку M , для которой угол AMB является наибольшим из всех таких углов. Докажите, что окружность, проходящая через точки A , B и M , касается прямой l .
14. На краю листа бумаги изображена дуга окружности, центр которой находится за пределами этого листа. Предложите способ построения прямой, проходящей через данную точку A и касающейся окружности, частью которой является данная дуга.

5.4. Метод вспомогательной окружности.

Задачи на вычисление и доказательство

Теоремы 5.9 и 5.10 и свойства вписанных углов позволяют решать некоторые интересные геометрические задачи с помощью метода, который иногда называют *методом вспомогательной окружности*.

Метод вспомогательной окружности

Суть метода хорошо иллюстрирует следующая задача.

Задача 1. *Через некоторую точку плоскости проведены три прямые так, что угол между любыми двумя из них равен 60° . Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из любой точки плоскости на эти прямые, служат вершинами равностороннего треугольника.*

Решение. Пусть три данные прямые пересекаются в точке O ; M — некоторая точка плоскости; A , B и C — основания перпендикуляров, опущенных из точки M на данные прямые.

Заметим, что точки O , M , A , B и C согласно теореме 5.10 лежат на одной окружности с диаметром OM . (На рисунке 153 эта окружность изображена штриховой линией, хотя ее можно было и вообще не изображать, а «представлять в уме».) Теперь мы видим, что $\angle ABC = \angle AOC$, поскольку оба они опираются на одну и ту же дугу. Значит, $\angle ABC = 60^\circ$. Точно так же $\angle ACB = \angle AOB = 60^\circ$. Из этого следует, что все углы треугольника ABC равны 60° , т. е. этот треугольник — равносторонний. ▼

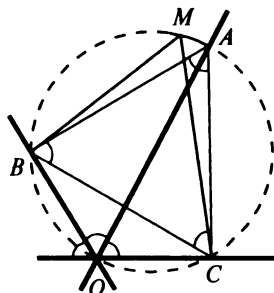


Рис. 153

Главной, дающей ключ к решению, здесь является фраза: «Заметим, что точки ... лежат на одной окружности». Во многих задачах, решаемых предложенным методом, встречается эта фраза.

* Теорема о высотах¹

Докажем с помощью этого же метода одну важную теорему планиметрии. Впоследствии мы еще не раз вернемся к этой теореме и более подробно ее обсудим. Сейчас же мы ее приведем лишь в качест-

¹ Здесь и далее * означает, что материал пункта не является обязательным.

ве интересного примера, иллюстрирующего рассматриваемый метод. Поэтому мы сформулируем ее даже не в виде теоремы, а в виде задачи.

Задача 2. Докажите, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Прежде чем приступить к доказательству, заметим, что формулировка задачи требует некоторого уточнения. Здесь допускается, что точка пересечения высот может находиться и на продолжениях высот.

Решение. Рассмотрим сначала случай остроугольного треугольника. Проведем в таком треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 и обозначим через H точку их пересечения (рис. 154), а через B_1 — точку пересечения AC и BH . Нам надо доказать, что угол BB_1A — прямой.

Заметим, что точки A, C, A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AC (!). Следовательно, $\angle A_1C_1C = \angle A_1AC$, поскольку в этой вспомогательной окружности они опираются на одну дугу.

Теперь заметим, что и точки B, H, A_1 и C_1 лежат на одной окружности с диаметром BH . Следовательно, $\angle A_1BH = \angle A_1C_1H$. Итак, получаем, что в треугольниках CAA_1 и CBB_1 один угол общий и $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$. Следовательно, равны и оставшиеся углы: $\angle BB_1C = \angle AA_1C = 90^\circ$, что и требовалось доказать. ▼

Рисунок 156 иллюстрирует случай, когда в треугольнике ABC один угол (угол B) является тупым. Рассуждение остается точно таким же.

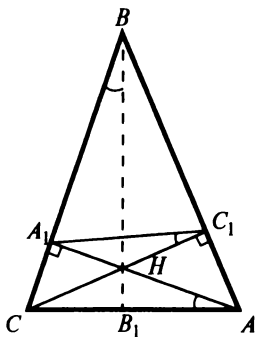


Рис. 154

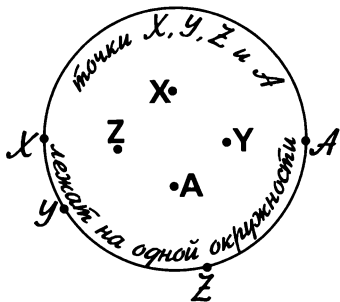


Рис. 155

Просто точки B и H как бы меняются местами. В этом случае точка пересечения высот оказывается расположенной вне треугольника.

Для прямоугольного треугольника точкой пересечения высот является вершина прямого угла.

Окружности и касательные

Рассмотрим теперь задачи, в которых фигурируют окружности и касающиеся их прямые. Решение подобного рода задач очень часто может быть основано на очень простом и известном вам факте: *касательные к окружности, выходящие из одной точки, равны*.

В качестве примера рассмотрим случай, изображенный на рисунке 157: две непересекающиеся окружности касаются сторон угла с вершиной A в указанных на рисунке точках, третья прямая также касается этих окружностей и пересекает стороны угла в точках B и C .

Заметим, что стороны угла являются *общими внешними касательными* к окружностям, а прямая BC — *общей внутренней касательной* к окружностям. Есть еще одна общая внутренняя касательная к этим окружностям, но на рисунке она не изображена.

В некоторых случаях под общими внешними касательными мы будем понимать отрезки этих касательных между точками касания. Так, утверждение, что общие внешние касательные к двум окружностям равны между собой, означает равенство соответствующих отрезков. В наших обозначениях это означает равенство $C_1C_2 = B_1B_2$.

Обозначим стороны и периметр треугольника ABC как обычно: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $2p = a + b + c$.

А теперь сформулируем задачу.

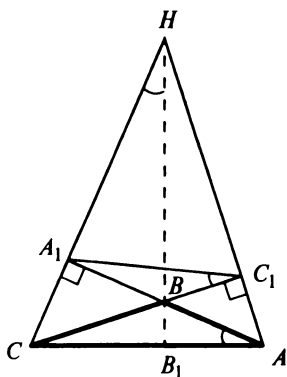


Рис. 156

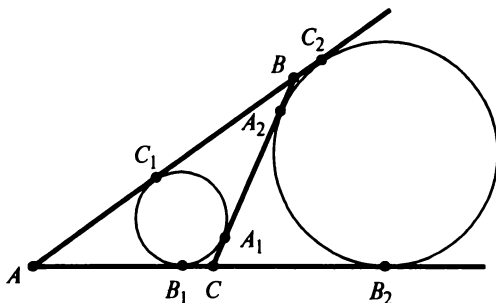


Рис. 157

Задача 3. Рассмотрим всевозможные отрезки с концами в точках касания, расположенные на проведенных прямых. Выразить эти отрезки через стороны треугольника ABC .

В подобных задачах полезно сначала обозначить каждый из рассматриваемых отрезков одной маленькой буквой. Тогда возникающие в процессе решения преобразования и формулы будут менее громоздкими и более наглядными. При этом для обозначения неизвестных обычно используют буквы: x, y, z, \dots

Решение. Пусть $AB_1 = AC_1 = x$. Тогда $CA_1 = CB_1 = b - x$, $BA_1 = BC_1 = c - x$. Из равенства $CA_1 + BA_1 = a$ получим $(c - x) + (b - x) = a$, откуда $x = \frac{b + c - a}{2} = p - a$. (Вспомните, в каких задачах мы уже использовали подобный прием.)

Для нахождения AB_2 и AC_2 заметим, что эти отрезки, как касательные, равны между собой и $AB_2 + AC_2 = (AC + CB_2) + (AB + BC_2) = (AC + CA_2) + (AB + BA_2) = AC + AB + BC = 2p$. Значит, $AB_2 = AC_2 = p$.

Точно так же находятся другие отрезки. Доведите самостоятельно решение до конца, а мы запишем окончательный результат: $BA_1 = BC_1 = CA_2 = CB_2 = p - b$, $CA_1 = CB_1 = BA_2 = BC_2 = p - c$, $C_1C_2 = B_1B_2 = a$, $A_1A_2 = |b - c|$. ▼

Вписанная окружность треугольника

Вернемся к рисунку 157, иллюстрирующему задачу 3.

Окружность, касающаяся сторон треугольника ABC , называется вписанной окружностью этого треугольника. (На рисунке это меньшая из двух окружностей.)

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.11.

У каждого треугольника существует единственная вписанная окружность.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC . Геометрическое место центров окружностей, вписанных в угол BAC , есть биссектриса этого угла. Центр любой окружности, вписанной в угол ABC , лежит на его биссектрисе. Две указанные биссектрисы пересекаются в точке J , которая равноудалена от сторон треугольника ABC и является центром вписанной в него окружности. ▼

(Почему две биссектрисы треугольника не могут быть параллельными?)

▲■● Задачи, задания, вопросы

-
- 1(в). Через некоторую точку плоскости проведены три прямые. Два из шести образовавшихся углов равны 50° и 70° . Найдите углы треугольника, вершинами которого являются основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки плоскости на данные прямые.
2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны следующие углы: $\angle ABC = 102^\circ$, $\angle DBC = 44^\circ$, $\angle ACD = 58^\circ$. Найдите $\angle CAD$.
- 3(в). Внутри угла с вершиной O взята точка M . Луч OM образует со сторонами угла углы 25° и 40° . Точки A и B — основания перпендикуляров, опущенных из M на стороны угла. Найдите углы треугольника AMB .
- 4(т). Внутри угла с вершиной O , отличного от прямого, взята точка M ; A и B — основания перпендикуляров, опущенных из M на стороны угла. Докажите, что прямая, проходящая через середины OM и AB , перпендикулярна AB .
5. На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся в точке O под углом 30° ; M — точка плоскости такая, что $OM = 2$; A и B — основания перпендикуляров, опущенных из M на данные прямые. Найдите AB .
- 6(п). На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся в точке O , M — точка на окружности с центром в O . Докажите, что расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из M на данные прямые, постоянно для всех точек окружности.
- 7(п). В треугольнике ABC проведены две высоты AA_1 и CC_1 . Найдите углы треугольника A_1BC_1 , если $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$.
- 8(пт). В треугольники ABC и CDA вписаны окружности. Найдите длину общей внешней касательной к этим окружностям, если:
- $AB = 5$, $BC = 7$, $CD = DA$;
 - $AB = 7$, $BC = CD$, $DA = 9$.
- 9(т). Стороны пятиугольника равны 5, 6, 7, 8 и 9 в порядке обхода и касаются одной окружности. На какие отрезки точка касания со стороной длины 5 делит эту сторону?

10(т). Докажите, что если стороны пятиугольника равны в порядке обхода соответственно 4, 6, 8, 7 и 9, то его стороны не могут касаться одной окружности.

11(тт). Докажите, что если четыре прямые касаются окружности, как показано на рисунке 158, то выполняются следующие равенства:

- а) $AB + CD = BC + DA$;
- б) $KB + DM = BM + KD$;
- в) $KA + AM = KC + CM$.

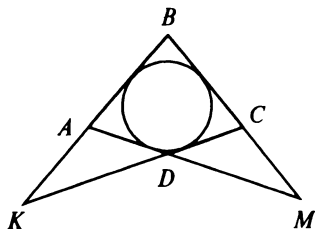


Рис. 158

12(т). В задаче 13 из § 5.2 мы находили сумму углов двух семиконечных звезд, вершины которых расположены на одной окружности. Рассмотрим семь точек, не лежащих на одной окружности и таких, что, соединив эти точки так же, как в той задаче, получим две семиконечные звезды, сходные с рассмотренными (рис. 159). Докажите, что сумма углов этих звезд осталась такой же. (Для этого постройте окружность, содержащую рассматриваемые точки.)

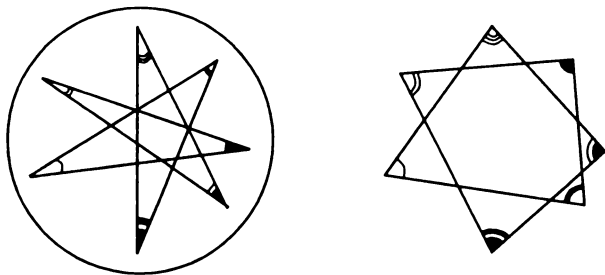


Рис. 159

13(тт). Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A . Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке D . Докажите, что прямая AD проходит через середину дуги BC большей окружности, не содержащей точки A .

14(т). В треугольнике ABC угол A равен 70° , а угол B равен 50° . Внутри треугольника взята точка M так, что $\angle MAC = \angle MBC = 30^\circ$. Найдите $\angle MCA$.

- 15(т).** В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Пусть M — некоторая точка на прямой BC . Докажите, что сумма $B_1M + C_1M$ принимает наименьшее значение, когда точка M совпадает с A_1 .
- 16(т).** В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что точка пересечения высот треугольника ABC является центром вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$ окружности.
- 17(пт).** На плоскости изображена окружность и прямая l , проходящая через ее центр. Пусть A — некоторая точка плоскости, не лежащая ни на окружности, ни на прямой l . С помощью только линейки постройте прямую, проходящую через A и перпендикулярную l .
- 18(пт).** Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC . Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности на прямые AB , BC и CA , лежат на одной прямой. (Эта прямая носит название прямой Симсона.)
- 19(т).** Точки A , B , C , D , E и F расположены на окружности. Хорды EC и DA пересекаются в точке M , а хорды BE и DF — в точке N . Докажите, что если хорды AB и CF параллельны, то они параллельны также прямой MN .

Подобие



Основная цель этой главы — изучение свойств подобных фигур. Существование подобных фигур и тел является одной из самых важных характеристик евклидова пространства, изучаемой нами евклидовой геометрии. С проявлениями подобия мы очень часто встречаемся в жизни.

В магазине детских игрушек можно увидеть модели автомобилей, являющиеся подобием реальных машин. Да и вообще, очень многие детские игрушки подобны реальным предметам взрослого мира. Когда мы рассматриваем репродукции картин известных мастеров живописи, то также имеем дело с изображением, представляющим собой подобие подлинника. Хотя, конечно, никакая копия произведения искусства не может дать полное представление о нем.

Обувь или одежда одного фасона выпускается разных размеров. И здесь можно сказать, что, например, кроссовки одного вида подобны. Эти примеры можно продолжать и дальше. В конце концов, все люди подобны друг другу и, как утверждает Библия, создал их Бог по своему образу и подобию.

6.1. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые достаточно хорошо известные многим из вас виды четырехугольников. Каждый из них обладает рядом интересных и важных свойств. Из всех этих свойств мы выделим и рассмотрим лишь небольшую часть. В основном это те свойства, которые будут непосредственно необходимы в следующих параграфах для развития геометрической теории.

Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны (рис. 160).



Рис. 160

Теорема 6.1. (о свойствах и признаках параллелограмма).

В любом параллелограмме:

- а) противоположные стороны равны;***
- б) противоположные углы равны;***
- в) диагонали делятся пополам точкой пересечения.***

При этом, если четырехугольник имеет любое из трех перечисленных свойств, то этот четырехугольник — параллелограмм.

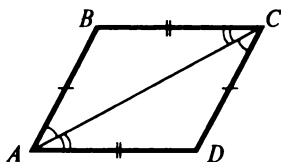


Рис. 161

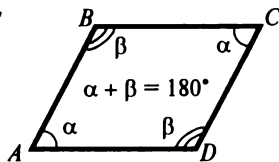


Рис. 162

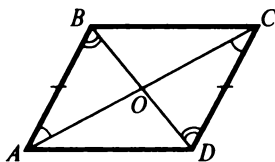


Рис. 163

Каждый из пунктов теоремы дает как свойство параллелограмма, так и признак параллелограмма.

Доказательство. а) *Свойство параллелограмма.* Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 161). Согласно свойству параллельных прямых $\angle BAC = \angle ACD$ (AB и CD — параллельные прямые, AC — секущая). Точно так же $\angle ACB = \angle CAD$. Таким образом, треугольники ABC и CDA равны по второму признаку равенства треугольников и $AB = CD$, $BC = AD$.

Признак параллелограмма. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ имеют место равенства $AB = CD$ и $BC = AD$. Тогда треугольники ABC и CDA равны по третьему признаку равенства треугольников. Эти треугольники должны располагаться по разные стороны от прямой AC , так как в противном случае $ABCD$ не являлся бы четырехугольником. Следовательно, из равенства $\angle BAC = \angle DCA$ мы можем заключить, что прямые AB и CD параллельны, а из равенства $\angle BCA = \angle DAC$ сделать вывод о параллельности BC и AD . Значит, $ABCD$ — параллелограмм.

б) *Свойство параллелограмма.* Если $ABCD$ — параллелограмм, то из равенства треугольников ABC и CDA мы получаем равенство углов ABC и CDA , а из равенства треугольников BAD и DCB следует равенство двух других противоположных углов этого параллелограмма.

Признак параллелограмма. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ равны противоположные углы при вершинах A и C , а также при вершинах B и D . Обозначим величины углов первой пары через α , а второй пары — через β (рис. 162). Зная, что сумма углов четырехугольника равна 360° , получим $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, откуда $\alpha + \beta = 180^\circ$. Теперь на основании признака параллельности получаем, что в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны.

в) *Свойство параллелограмма.* Обозначим через O точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 163). На основании пункта а) заключаем, что $AB = CD$. Кроме того, согласно свойству

параллельных и секущей, $\angle ABO = \angle ODC$ и $\angle BAO = \angle OCD$. Значит, треугольники BAO и DCO равны по второму признаку равенства треугольников и $AO = CO$, $BO = OD$.

Признак параллелограмма. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Тогда треугольники BAO и DCO равны согласно первому признаку равенства треугольников, поэтому $\angle BAO = \angle DCO$, т. е. прямые AB и CD параллельны на основании соответствующего признака параллельности. Точно так же параллельными являются стороны AB и BC . ▼

Прямоугольник

Прямоугольником называется четырехугольник, все углы которого прямые (рис. 164).

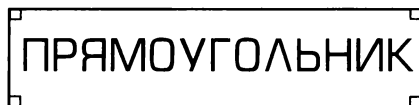


Рис. 164

Из определения прямоугольника следует параллельность его противоположных сторон, т. е. прямоугольник является частным видом параллелограмма.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6.2.

- а) **Прямоугольник — параллелограмм, у которого равны диагонали.**
- б) **Параллелограмм с равными диагоналями является прямоугольником.**

Доказательство. а) Справедливость первой части пункта а) следует из того, что прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ (рис. 165). Прямоугольные треугольники BAD и CDA равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = CD$, так как $ABCD$ — параллелограмм, и $\angle BAD = \angle CDA = 90^\circ$). Значит, $AC = BD$.

б) Пусть в параллелограмме $ABCD$ равны диагонали AC и BD (рис. 166). Тогда треугольники BAD и CDA равны по третьему признаку равенства треугольников. Значит, $\angle BAD = \angle CDA$. Но сумма

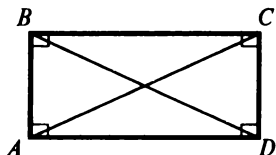


Рис. 165

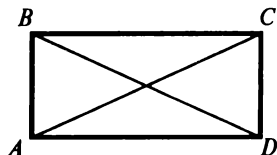


Рис. 166

этих углов равна 180° , поскольку прямые AB и CD параллельны. Следовательно, каждый из них равен 90° , а значит, прямыми являются все углы параллелограмма $ABCD$. ▼

Ромб

Ромбом называется четырехугольник, все стороны которого равны между собой (рис. 167).

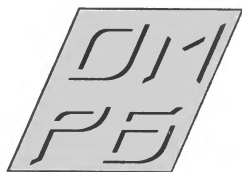


Рис. 167

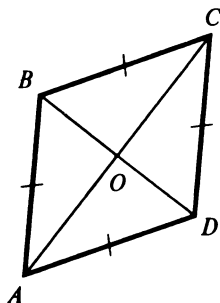


Рис. 168

Теорема 6.3.

- а) Ромб является параллелограммом. Диагонали ромба перпендикулярны, а каждая из диагоналей является биссектрисой соответствующих углов ромба.**
- б) Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.**
- в) Если в параллелограмме одна из диагоналей делит пополам каждый из углов, через которые она проходит, то этот параллелограмм — ромб.**

Как видим, в пункте а) сформулированы свойства ромба, а в пунктах б) и в) — признаки ромба.

Доказательство. а) То, что четырехугольник, у которого все стороны равны, является параллелограммом, следует из соответствующего признака параллелограмма. (Теорема 6.1, пункт а), обратное утверждение.)

Далее, каждая из диагоналей, согласно свойству параллелограмма, делится точкой пересечения пополам (рис. 168). А поскольку треугольники ABC и ADC — равнобедренные, медианы BO и DO перпендикулярны их общему основанию AC и являются биссектрисами каждого из этих треугольников. Точно так же диагональ AC делит пополам углы BAD и BCD .

б) Если в параллелограмме $ABCD$ диагонали перпендикулярны, то ABC и ADC — равнобедренные треугольники с общим основанием AC . Это следует из соответствующего признака равнобедренного треугольника: в каждом из треугольников ABC и ADC медиана, проведенная к стороне AC , является и высотой треугольника.

Значит, $AC = BC$, $AD = DC$. Кроме того, $AB = DC$. Следовательно, $ABCD$ — ромб.

в) Справедливость утверждения этого пункта также следует из признаков равнобедренного треугольника: если указанным свойством обладает диагональ BD , то в треугольниках ABC и ADC медианы, проведенные к стороне AC , являются биссектрисами этих треугольников. ▼

Квадрат

Квадратом называется четырехугольник, у которого все стороны равны между собой, а все углы — прямые (рис. 169).

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба, поскольку он является и прямоугольником, и ромбом. Но у квадрата есть и свои специальные свойства, о которых будет сказано позднее.

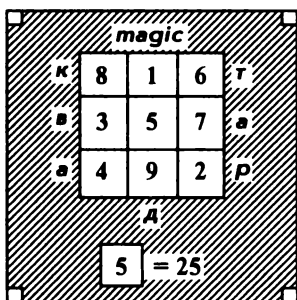


Рис. 169

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

-
1. Какой четырехугольник называется параллелограммом, прямоугольником, ромбом, квадратом?
 - 2(в). Какие из рассмотренных в этом параграфе четырехугольников имеют центр симметрии, а какие — ось симметрии?
 - 3(в). Сколько осей симметрии имеет прямоугольник, ромб, квадрат? Как расположены оси симметрии этих четырехугольников?
 - 4(пт). Верно ли, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом (O — точка пересечения его диагоналей), если:
 - а) стороны AB и CD равны, а стороны BC и AD параллельны;
 - б) $AO = OC$, а стороны AB и CD параллельны;
 - в) $AB = CD$ и $\angle BAD = \angle DCB$;
 - г) $AO = OC$ и $AB = CD$;
 - д) $AO = OC$ и $\angle ABC = \angle ADC$.
 - 5(п). На плоскости расположены точки A , B , C и D . Известно, что $\angle ABC = \angle ADC$ и $\angle BAD = \angle BCD$. Обязательно ли данные точки служат вершинами параллелограмма?
 6. Найдите меньшую диагональ ромба со стороной, равной 1, и острым углом в 60° .
 7. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ — ромб. Диагональ AC составляет со стороной AB угол 30° . Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника $ABCD$ равна 3.
 - 8(в). Около каких из рассмотренных в этом параграфе четырехугольников можно описать окружность, а в какие можно вписать окружность?
(Описать около четырехугольника окружность означает: построить окружность, проходящую через все вершины этого четырехугольника; вписать — построить окружность, касающуюся всех сторон этого четырехугольника.)
 - 9(пт). О параллелограмме $ABCD$ известно, что $\angle ABD = 40^\circ$ и что центры окружностей, описанных около треугольников ABC и CDA , лежат на диагонали BD . Найдите $\angle DBC$.

- 10(т).** Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Известно, что радиусы окружностей, описанных около этих четырех треугольников, равны между собой. Докажите, что этот четырехугольник — ромб.
- 11(п).** Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K и продолжение стороны CD в точке M . Известно, что $CM = 1$, $BK = 3$. Найдите стороны параллелограмма.
- 12.** От параллелограмма с помощью прямой, пересекающей две его противоположные стороны, отрезали ромб. От оставшегося параллелограмма таким же образом вновь отрезали ромб. И от вновь оставшегося параллелограмма опять отрезали ромб. В результате остался параллелограмм со сторонами 1 и 2. Найдите стороны исходного параллелограмма.
- 13(т).** На сторонах AD и DC ромба $ABCD$ построены правильные треугольники AKD и DMC так, что точка K лежит по ту же сторону от AD , что и прямая BC , а точка M — по другую сторону от DC , чем AB . Докажите, что точки B , K и M лежат на одной прямой.
- 14(т).** Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник, диагонали которого параллельны сторонам параллелограмма и равны разности соседних сторон параллелограмма.
- 15(т).** Будем говорить, что фигура имеет постоянную ширину, если она может вращаться между двумя параллельными прямыми так, что ее граница не пересекает ни одной из этих прямых, но всегда касается каждой из них (т. е. на каждой из прямых лежит хотя бы одна точка, принадлежащая границе фигуры). Понятно, что круг имеет постоянную ширину. Но оказывается, существуют и другие фигуры постоянной ширины. Например, так называемый *треугольник Рило*. Он получается следующим образом.
- Рассмотрим равносторонний треугольник. Построим три круга с центром в вершинах этого треугольника с радиусами, равными его стороне. Общая часть этих трех кругов и является треугольником Рило.
- Проверьте, что треугольник Рило имеет постоянную ширину. Найдите еще какие-нибудь фигуры постоянной ширины.

16(т). Плоскость пересекает ребра AB , BC , CD и DA пирамид $ABCD$ в точках K , P , M и H соответственно; $KPMH$ — параллелограмм. Докажите, что стороны этого параллелограмма параллельны AC и BD .

6.2. Теорема Фалеса и следствия из нее

Самым древним из ученых, вошедших в историю геометрии, является греческий философ Фалес, живший свыше двух с половиной тысячелетий тому назад. Можно сказать, что с Фалеса начинается история геометрии как науки. О Фалесе и его достижениях в геометрии было сказано в главе 3. А сейчас сформулируем и докажем теорему, которая лежит в основе теории подобия.

Теорема Фалеса

Теорема 6.4 (теорема Фалеса).

Пусть через точки A , B , C и D , расположенные на одной стороне угла, проведены параллельные прямые, пересекающие другую сторону этого угла в точках A_1 , B_1 , C_1 и D_1 соответственно. Тогда, если равны отрезки AB и CD , то равны и отрезки A_1B_1 и C_1D_1 .

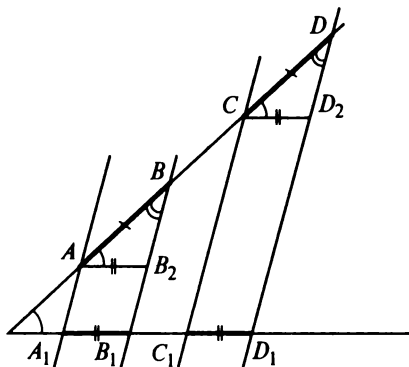


Рис. 170

Доказательство. Проведем через A и C прямые, параллельные другой стороне угла (рис. 170). Получим два параллелограмма $AB_2B_1A_1$ и $CD_2D_1C_1$. Согласно свойству параллелограмма (теорема 6.1), $AB_2 = A_1B_1$ и $CD_2 = C_1D_1$. Итак, нам осталось доказать равенство $AB_2 = CD_2$. Треугольники ABB_2 и CDD_2 равны на основании второго признака равенства треугольников; $AB = CD$ согласно условию теоремы; $\angle ABB_2 = \angle CDD_2$ как соответственные, образовавшиеся при пересечении параллельных BB_1 и DD_1 прямой BD ; точно так же каждый из углов BAB_2 и DCD_2 оказывается равным данному углу с вершиной O . Таким образом, теорема доказана полностью. ▼

Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон (рис. 171).



Рис. 171

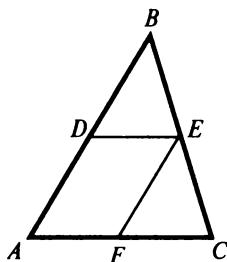


Рис. 172

Теорема 6.5.

Средняя линия треугольника параллельна соответствующей стороне этого треугольника и равна половине этой стороны.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и обозначим через D середину стороны AB (рис. 172). Проведем через D прямую, параллельную AC . Пусть эта прямая пересекает BC в точке E . Согласно теореме Фалеса, $BE = EC$, т. е. DE и есть средняя линия треугольника. Первая часть теоремы доказана.

Теперь проведем через E прямую, параллельную AD , и обозначим через F точку ее пересечения с AC . Поскольку E — середина BC , по теореме Фалеса F — середина AC . Но $ADEF$ — параллелограмм, значит, $DE = AF = \frac{1}{2} AC$. Таким образом, теорема доказана. ▼

Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны между собой, а две другие не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются **основаниями** трапеции, а непараллельные — **боковыми сторонами** (рис. 173).

Трапеция с равными боковыми сторонами называется **равнобочной**.

Вообще-то, трапеция должна была «открывать» рассматриваемый нами ряд четырехугольников. Тогда мы имели бы «цепочку», в которой постепенно возрастает число условий, определяющих вид четырехугольника. Но только сейчас у нас появилась возможность доказать одну важную теорему о трапеции.

Введем еще один термин.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

Теорема 6.6.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 174). Обозначим через K и M середины боковых сторон AB и CD . Рассмотрим еще одну точку — середину P диагонали BD . Тогда KP — средняя линия треугольника ABD , а PM — средняя линия треугольника BDC . По теореме 6.5 KP и PM параллельны соответственно AD и BC , а поскольку AD и BC параллельны между собой, точки K , P и M лежат на одной прямой, параллельной основаниям трапеции. Кроме того,

$$KM = KP + PM = \frac{1}{2} (AD + BC). \blacktriangledown$$

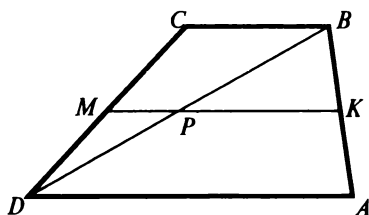


Рис. 173

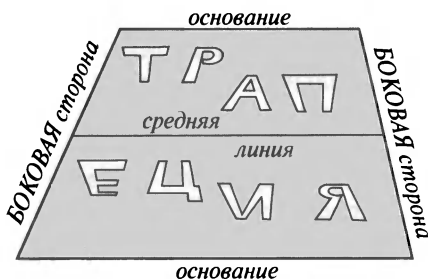


Рис. 174

Конечно же, теорема о средней линии верна не только для трапеций, но и для параллелограммов, а значит, и для всех остальных рассмотренных нами видов четырехугольников.

Пропорциональные отрезки

В начале нашего курса мы говорили, что любым двум отрезкам соответствует число, которое называется *отношением этих отрезков*.

Отношение двух отрезков a и b мы записываем в виде дроби $\frac{a}{b}$; оно является числом, равным отношению длин данных отрезков. Это число не зависит от единицы длины, выбранной для измерения отрезков. Можно сказать, что отношение отрезков a и b равно длине отрезка a , когда в качестве единицы измерения взят отрезок b .

Рассмотрим теперь две пары отрезков: a и b , c и d . Будем говорить, что эти пары пропорциональны, если их отношения равны, т. е. имеет место равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Теория подобия основывается на следующей теореме.

Теорема о пропорциональных отрезках

Теорема 6.7.

Пусть стороны угла пересекаются двумя параллельными прямыми. Тогда отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам на другой его стороне.

Иными словами, если A — вершина угла и пара параллельных прямых пересекает одну сторону в точках B и C , а другую — соответственно в точках B_1 и C_1 , то $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}$.

Доказательство. Заметим, что если на одной стороне угла последовательно отложить от вершины равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то в соответствии с теоремой Фалеса на другой стороне угла также образуются равные отрезки.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим угол с вершиной в точке A , стороны которого пересече-

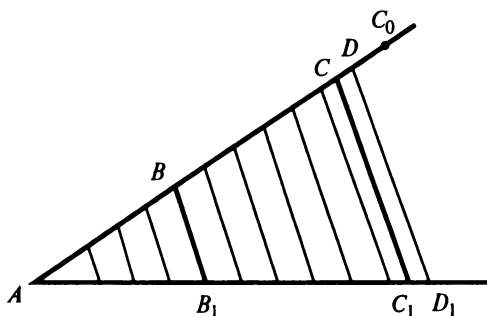


Рис. 175

ны параллельными прямыми BB_1 и CC_1 (рис. 175). Нам требуется доказать равенство $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1}$.

Предположим, что эти дроби не равны. Пусть, например, $\frac{BC}{AB} < \frac{B_1C_1}{AB_1}$. Возьмем на продолжении отрезка BC точку C_0 так, что $\frac{BC_0}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1}$. Разделим отрезок AB на достаточно большое число равных отрезков таких, что длина каждого из них меньше длины отрезка CC_0 . Пусть h — длина одного из отрезков разбиения. Будем последовательно откладывать от точки B отрезки длины h до тех пор, пока конец одного из них (обозначим его буквой D) не попадет внутрь отрезка CC_0 . Такой момент непременно наступит, поскольку длина шага h меньше длины CC_0 . Проведем через концы получившихся маленьких отрезков прямые, параллельные прямым BB_1 и CC_1 . Точке D будет соответствовать точка D_1 . При этом отрезок B_1D_1 больше отрезка B_1C_1 . Как мы знаем, построенная система параллельных образует на другой стороне угла также равные отрезки. Пусть длина каждого равна h_1 . Если на отрезке AB было n отрезков длины h , а на отрезке BD было m таких отрезков, то отрезок AB_1 окажется разделенным на n отрезков длины h_1 , а отрезок B_1D_1 на m таких же отрезков. Значит,

$$\frac{BD}{AB} = \frac{m}{n} = \frac{B_1D_1}{AB_1}.$$

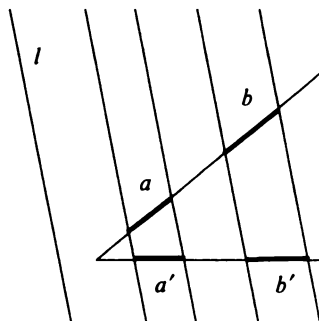
Но, с другой стороны,

$$\frac{BC_0}{AB} > \frac{BD}{AB} = \frac{B_1D_1}{AB_1} > \frac{B_1C_1}{AB_1},$$

что противоречит выбору точки $C_0 \left(\frac{BC_0}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} \right)$. Полученное проти-

ворочие доказывает теорему. ▼

В связи с доказанной теоремой сделаем одно замечание. Если дан угол и прямая l , то любая пара прямых, параллельных l , отсекает на сторонах угла пару отрезков, отношение которых постоянно. Это отношение определяется лишь направлением прямой l (рис. 176).



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Рис. 176

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

-
- 1(в). Докажите, что средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника.
 - 2(в). Докажите, что середины сторон четырехугольника служат вершинами параллелограмма, стороны которого параллельны диагоналям четырехугольника и равны половинам этих диагоналей.
 - 3(п). Докажите, что если диагонали четырехугольника равны, то середины его сторон служат вершинами ромба.
 - 4(п). Докажите, что если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то середины его сторон служат вершинами прямоугольника.
 - 5(п). Докажите, что если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, перпендикулярны, то его диагонали равны.
 - 6(п). Докажите, что если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, равны, то его диагонали перпендикулярны.

- 7(в). Через вершины треугольника проведены прямые, параллельные его противоположным сторонам. Докажите, что стороны получившегося треугольника в два раза больше сторон исходного треугольника.
8. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и K , причем $AM = \frac{3}{4} AB$, $AK = \frac{3}{4} AC$. Найдите длину отрезка MK , если $BC = 5$.
9. Найдите геометрическое место середин всевозможных отрезков, один конец которых совпадает с вершиной A треугольника ABC , а другой расположен на стороне BC .
10. Данный треугольник разрежьте на 4 равных треугольника. Приведите пример треугольника, который можно разрезать на 4 равных треугольника двумя различными способами.
- 11(п). Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции, если ее основания равны a и b .
- 12(в). В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через вершину C проведена прямая, параллельная AB и пересекающая AD в точке M . Докажите, что в треугольнике DCM две стороны равны боковым сторонам трапеции, а третья сторона равна разности ее оснований.
- 13(в). Докажите, что в равнобокой трапеции:
а) равны углы при каждом основании;
б) равны диагонали.
- 14(п). Докажите, что если в трапеции выполняется одно из следующих условий:
а) равны углы при основании;
б) равны диагонали,
то эта трапеция является равнобокой.
- 15(п). Постройте трапецию по четырем ее сторонам.
- 16(п). Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.
17. Через концы основания AD трапеции $ABCD$ проведена окружность, пересекающая прямые AB и CD в точках K и M . Докажите, что точки B , C , K и M расположены на одной окружности.
- 18(в). Данный отрезок разделите на три равные части.

19. На одной из сторон угла расположены два отрезка длиной 3 и 4. Через их концы проведены параллельные прямые, образующие на другой стороне также два отрезка. Длина большего из отрезков равна 6. Найдите длину другого отрезка.
- 20(п). Основания трапеции равны a и b . Две прямые, параллельные основаниям, делят одну из боковых сторон на три равные части. Найдите отрезки этих прямых, лежащие внутри трапеции.
21. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна 5, а основание BC равно 4. Какую из сторон трапеции, BC или CD , пересекает биссектриса угла A этой трапеции?
- 22(пт). Докажите, что если в четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины AB и CD , равен полусумме AD и BC , то AD и BC параллельны.
23. На стороне AB четырехугольника $ABCD$ взята точка M_1 . Через эту точку проведем прямую, параллельную диагонали AC , пересекающую BC в точке M_2 . Прямая, проходящая через M_2 параллельно BD , пересекает CD в точке M_3 . Затем получаем таким же образом точку M_4 на DA и точку M_5 на AB . Докажите, что точка M_5 совпадает с M_1 .
- 24(т). В треугольнике ABC на стороне AB взята точка M_1 . Прямая, проходящая через M_1 параллельно CA , пересекает BC в точке M_2 . Прямая, проходящая через M_2 параллельно AB , пересекает AC в точке M_3 . Прямая, проходящая через M_3 параллельно BC , пересекает AB в точке M_4 . При каком положении точки M_1 точка M_4 совпадает с ней? Пусть точка M_4 не совпала с M_1 . Продолжая этот процесс, последовательно получим точки M_5 , M_6 и M_7 . Докажите, что M_7 совпадает с M_1 .
- 25(т). В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC имеет место равенство $\angle ABD = \angle ACD$. Докажите, что эта трапеция равнобокая.
- 26(т). Диагонали трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке O . Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOB и BOC , касаются друг друга.
- 27(п). Две окружности пересекаются в точках A и B . Прямая, проходящая через A , вторично пересекает окружности в точках K и M , а прямая, проходящая через B , вторично пере-

- секает окружности в точках P и Q . Докажите, что точки K , M , P и Q служат вершинами трапеции или параллелограмма.
- 28(т). Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции расположена ближе к меньшему ее основанию, чем к большему.
- 29(т). Основания трапеции равны 4 и 3, а боковые стороны при продолжении пересекаются под прямым углом. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.
- 30(т). На стороне CB треугольника ABC взята точка M , а на стороне CA — точка P . Известно, что $\frac{CP}{CA} = 2 \frac{CM}{CB}$. Через M проведена прямая, параллельная CA , а через P — прямая, параллельная AB . Докажите, что построенные прямые пересекаются на медиане, выходящей из вершины C .
31. Покажите, каким образом произвольный треугольник можно разрезать на три трапеции.
- 32(т). Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведена произвольная прямая, пересекающая продолжения сторон AB и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что произведение $BK \cdot DM$ не зависит от того, как проведена эта прямая.
33. Докажите, что если у треугольной пирамиды все грани — равные между собой треугольники, то, разрезав ее поверхность по трем ребрам, выходящим из одной вершины, мы получим в качестве развертки треугольник, в котором проведены средние линии.
34. Докажите, что если в треугольной пирамиде сумма углов при каждой из трех вершин равна 180° , то все ее грани являются равными треугольниками.

6.3. Подобные треугольники.

Признаки подобия треугольников

Подобие треугольников

В начале этой главы мы говорили о том, что существование подобных фигур является одним из основных свойств нашего пространства. На основании личного опыта, интуиции мы достаточно хоро-

шо умеем узнавать подобные предметы или фигуры, выделять их среди прочих. Тем не менее, перевести эти представления на четкий математический, геометрический язык не так просто. Поэтому мы начнем изучение свойств подобия с основной простейшей геометрической фигуры — с треугольника.

*Два треугольника называются **подобными**, если у них равны углы, а соответствующие стороны пропорциональны.*

Это означает, что если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны между собой, причем вершинам A , B и C соответствуют вершины A_1 , B_1 и C_1 , то углы при этих вершинах равны между собой и, кроме того, выполняются равенства

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}.$$

Обозначим эти отношения через k и будем называть величину k **коэффициентом подобия** треугольника $A_1B_1C_1$ по отношению к треугольнику ABC .

Подобие треугольников принято обозначать символом \sim . В нашем случае мы могли бы записать $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ (рис. 177). (\triangle — общепринятый знак, обозначающий треугольник.)

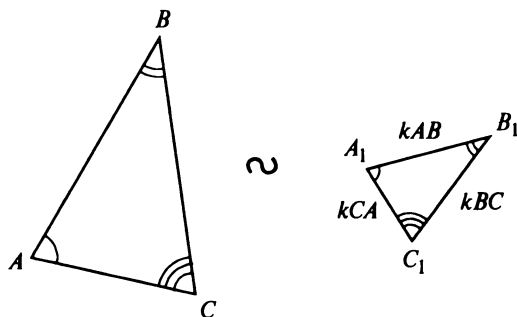


Рис. 177

Мы только что определили, какие треугольники называются подобными. Однако данное определение не гарантирует существование не равных, но подобных треугольников. Следующая теорема, вытекающая из теоремы о пропорциональных отрезках, утверждает также и то, что такие треугольники существуют.

Основная теорема о подобных треугольниках

Теорема 6.8.

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, образуют с его сторонами подобные между собой треугольники.

Теорема утверждает, что если стороны угла с вершиной A пересекаются двумя параллельными прямыми, одна из которых пересекает их в точках B и C , а другая — в точках B_1 и C_1 соответственно, то треугольники ABC и AB_1C_1 подобны. При этом соответственными являются вершины A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 .

Доказательство. То, что в треугольниках ABC и AB_1C_1 (рис. 178) соответствующие углы равны, непосредственно следует из свойств параллельных прямых. Так что одно из условий, определяющих подобие треугольников, выполнено.

Пропорциональность сторон AB и AB_1 , AC и AC_1 утверждается в теореме 6.7.

Из этой теоремы следует равенство

$\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}$. Но если к обеим частям последнего равенства прибавить по 1, то получим

$$\frac{AB + BB_1}{AB} = \frac{AC + CC_1}{AC}, \quad \frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC},$$

что означает пропорциональность пар сторон AB , AB_1 и AC , AC_1 . Для завершения доказательства осталось установить, что и оставшаяся пара сторон BC и B_1C_1 пропорциональна двум рассмотренным. Для этого проведем через вершину B прямую, параллельную AC , и обозначим через K точку ее пересечения с B_1C_1 . Поскольку $CBKC_1$ — параллелограмм, $KC_1 = BC$. Теперь по теореме 6.7 получаем, что

$$\frac{B_1C_1}{KC_1} = \frac{AB_1}{AB} \quad \text{или} \quad \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AB}.$$

Таким образом, доказательство теоремы завершено. ▼

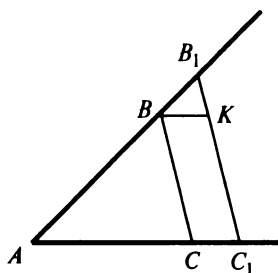


Рис. 178

Признаки подобия треугольников

В соответствии с тремя признаками равенства треугольников можно сформулировать и три признака подобия треугольников.

Первый признак подобия треугольников.

Если угол одного треугольника равен углу другого, а стороны, образующие этот угол в одном треугольнике, пропорциональны соответствующим сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Второй признак подобия треугольников.

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Третий признак подобия треугольников.

Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Начало доказательства одинаково для всех трех признаков. Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, для которых выполняется одно из трех сформулированных условий (рис. 179). При этом будем считать, что обозначения выбраны следующим образом.

Первый признак. Равны углы при вершинах A и A_1 , кроме того,

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}.$$

Второй признак. Равны углы при вершинах A и A_1 , B и B_1 .

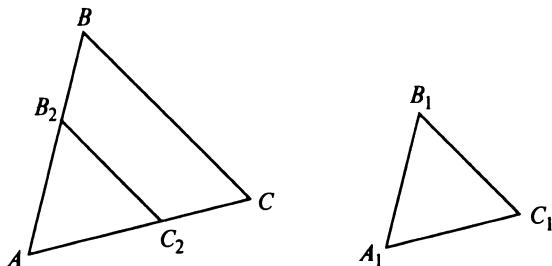


Рис. 179

Третий признак. Верны равенства

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}.$$

Отложим на луче AB отрезок $AB_2 = A_1B_1$ и проведем через B_2 прямую, параллельную BC . Получившийся треугольник AB_2C_2 подобен треугольнику ABC по теореме 6.8.

Нам остается доказать, что треугольник AB_2C_2 равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

Первый признак. В треугольниках $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 равны углы при вершинах A и A_1 , $A_1B_1 = AB_2$. Кроме того, по условию

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}.$$

А из того, что треугольники AB_2C_2 и ABC подобны,

следует равенство $\frac{AB_2}{AB} = \frac{AC_2}{AC}$. Из этих двух равенств получаем (так как $A_1B_1 = AB_2$), что $A_1C_1 = AC_2$. Значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 равны по первому признаку равенства треугольников.

Второй признак. Треугольники $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 имеют по одной равной стороне ($A_1B_1 = AB_2$). Кроме того, равны углы, прилежащие к этим сторонам. Эти треугольники равны по второму признаку равенства треугольников.

Третий признак. По условию и на основании теоремы 6.8 имеем следующие равенства:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}, \quad \frac{AB_2}{AB} = \frac{B_2C_2}{BC} = \frac{C_2A}{CA}.$$

А так как $A_1B_1 = AB_2$, то $B_1C_1 = B_2C_2$, $C_1A_1 = C_2A$.

Значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 равны по третьему признаку равенства треугольников. ▼

Итак, все три признака доказаны. Сразу отметим, что чаще всего при решении задач, доказательстве теорем используется второй признак.

Кроме трех указанных признаков, можно доказать и специальный признак подобия прямоугольных треугольников, соответствующий специальному признаку равенства прямоугольных треугольников. Но мы этого делать не будем, так как он практически почти не используется.

Важное свойство подобных фигур

Подобные между собой треугольники обладают одним очень важным свойством, которое является характерным для любых подобных фигур.

Теорема 6.9.

Отношение любых соответствующих линейных элементов двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Это означает, что если ABC и $A_1B_1C_1$ — подобные треугольники, причем коэффициент подобия равен k (треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k), то каждой точке одного треугольника можно поставить в соответствие одну точку другого. При этом, если точке M в треугольнике ABC соответствует точка M_1 треугольника $A_1B_1C_1$, а точке K треугольника ABC — точка K_1 треугольника $A_1B_1C_1$, то $\frac{M_1K_1}{MK} = k$.

Доказательство. Пусть M — некоторая точка треугольника ABC (рис. 180). Поставим ей в соответствие точку M_1 треугольника $A_1B_1C_1$ таким образом, чтобы треугольник $A_1B_1M_1$ был подобен треугольнику ABM . (Соответствующими являются вершины, обозначенные одинаковыми буквами.) При этом треугольник $A_1B_1M_1$ по отношению к треугольнику $A_1B_1C_1$ расположен так же, как и треугольник ABM по отношению к треугольнику ABC . Понятно, что такое соответствие можно установить между всеми точками этих треугольников. Пусть теперь точке K таким же образом поставлена в соответствие точка K_1 .

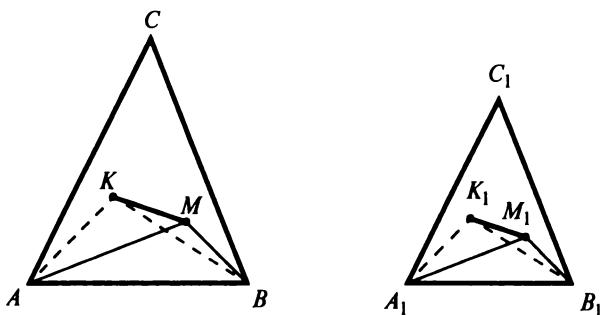


Рис. 180

Треугольник $A_1B_1M_1$ подобен треугольнику ABM с коэффициентом k . С этим же коэффициентом треугольник $A_1B_1K_1$ подобен треугольнику ABK . Из этого следует, что

$$\frac{A_1M_1}{AM} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1K_1}{AK} = k.$$

При этом $\angle MAK = \angle MAB - \angle KAB = \angle M_1A_1B_1 - \angle K_1A_1B_1 = \angle M_1A_1K_1$. Следовательно, треугольник $M_1A_1K_1$ подобен треугольнику MAK с коэффициентом k (по первому признаку подобия).

Значит, $\frac{M_1K_1}{MK} = k$. ▼

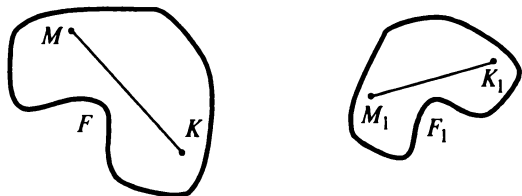
Доказанное в последней теореме свойство лежит в основе определения подобия для произвольных фигур.

Две фигуры F и F_1 называются **подобными**, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие (т. е. каждой точке одной фигуры соответствует одна точка другой фигуры и наоборот), сохраняющее отношение расстояний (рис. 181).

Это значит, что если точкам M и K фигуры F соответствуют точки M_1 и K_1 фигуры F_1 , то $\frac{M_1K_1}{MK} = k$, где k — постоянная величина, называемая **коэффициентом подобия** фигуры F_1 по отношению к фигуре F .

Понятие подобия распространяется и на пространственные объекты, тела.

Точки подобных фигур, соответствующие друг другу, называются **соответственными**. Отрезки, концами которых являются соответственные точки, мы также будем называть **соответственными**.



$$\frac{M_1K_1}{MK} = k$$

Рис. 181

При решении некоторых задач на подобие очень часто полезным может оказаться следующий простой факт: **отношение отрезков в одной фигуре равно отношению соответствующих отрезков в подобной фигуре**. Это значит, что если отрезку a одной фигуры соответствует отрезок a_1 другой, а отрезку b соответствует отрезок b_1 ,

то $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$. В самом деле, по определению подобных фигур $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$.

Значит, $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$.

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

1. Какие треугольники называются подобными?
 2. Дайте определения подобия для произвольных фигур.
 - 3(в). Будут ли подобными два четырехугольника, у которых соответственно равны все углы?
 4. Предложите способ измерения высоты дома, основанный на свойствах подобных фигур.
 - 5(в). Докажите, что любые два круга подобны друг другу.
 - 6(в). В начале главы говорилось о случаях подобия, с которыми мы встречаемся в повседневной жизни, однако подобие в обыденном смысле и с математической точки зрения — не одно и то же. Поэтому ответьте на вопрос: будут ли подобными две банки емкостью 3 л и 1 л?
 - 7(в). Докажите, что диагонали трапеции вместе с основаниями образуют два подобных треугольника.
 8. Одна из диагоналей трапеции делится точкой пересечения на отрезки длиной 2 и 3. Меньшее основание трапеции равно 5. Найдите большее основание трапеции.
 - 9(пт). Через середину наибольшей стороны треугольника проведена прямая, отсекающая от него треугольник, подобный данному. Найдите наименьшую сторону отсеченного треугольника, если стороны исходного треугольника равны:
а) 6, 7, 8; б) 6, 7, 9; в) 6, 7, 10.
- Сколько решений имеет задача в каждом случае?

- 10(в).** Какие треугольники можно разрезать на два подобных между собой треугольника?
- 11.** Из отрезков длиной 4, 6, 8, 9, 12 и 18 составили два подобных между собой треугольника. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.
- 12(п).** В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M так, что $\angle ABM = \angle ACB$. Известно также, что $AM = 1$, $MC = 3$. Найдите длину стороны AB .
- 13.** Все стороны треугольника различны. Один из углов равен 40° . Биссектриса этого угла делит треугольник на два треугольника, один из которых подобен исходному. Найдите наибольший угол исходного треугольника.
- 14.** На клетчатой бумаге изображено несколько пар треугольников (рис. 182). Докажите, что треугольники в каждой паре подобны.

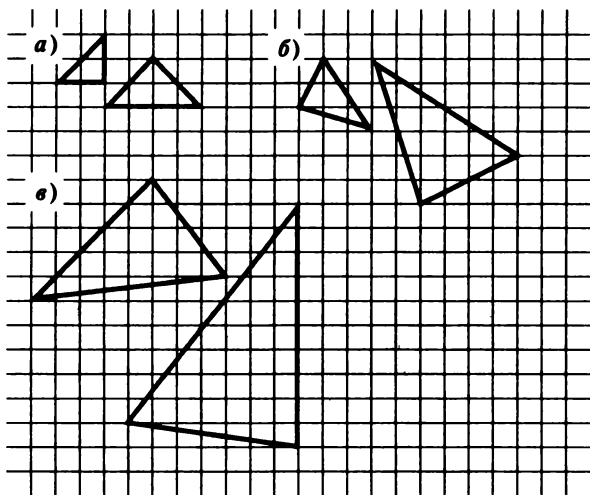


Рис. 182

- 15(пт).** У двух неравных, но подобных между собой треугольников имеется две пары соответственно равных сторон, длины которых 12 и 18. Найдите остальные стороны каждого треугольника.

- 16(п).** Две окружности пересекаются в точках A и B . Прямая, проходящая через A , вторично пересекает данные окружности в точках C и D . Докажите, что все получающиеся таким образом треугольники BCD подобны между собой.
- 17(в).** В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , CC_1 (A_1 и C_1 — основания высот). Докажите, что треугольник A_1BC_1 подобен треугольнику ABC .
- 18(т).** Диагональ трапеции делит ее на два подобных между собой треугольника. Отношение боковых сторон трапеции равно 2. Найдите отношение оснований трапеции.
- 19(п).** На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C взята точка D так, что $\angle BDC = \angle ABC$. Известно, что $AB = 3$, $DC = 8$. Найдите AC .
- 20.** В трапеции $ABCD$ известны основания: $AD = 7$, $BC = 3$. Прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекает боковые стороны AB и CD в точках K и M . Известно также, что $AK : KB = 7 : 3$. Найдите KM .
- 21(пт).** Докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам.
- 22(пт).** На плоскости даны две параллельные прямые и точка N . Используя результаты предыдущей задачи, с помощью только линейки постройте прямую, параллельную данным, проходящую через N .
- 23(т).** Основания трапеции равны a и b . Прямая, параллельная основаниям, делит трапецию на две подобные между собой трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.
- 24(т).** Основания трапеции равны a и b . Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.
- 25.** Две окружности с радиусами R и r касаются друг друга. Через точку касания проведена прямая, пересекающая эти окружности. Эта прямая при пересечении с окружностью радиуса R образует хорду длины a . Найдите длину хорды, отсекаемой на этой прямой второй окружностью.

26(п). Две окружности с диаметрами 3 и 5 касаются друг друга в точке A . Прямая, проходящая через A , вторично пересекает меньшую окружность в точке B , а большую — в точке C .

Найдите хорды AB и AC , если: а) $BC = \sqrt{3}$; б) $BC = \sqrt{5}$.

27(т). «Золотым» называется прямоугольник (говорят также, что отношение сторон этого прямоугольника представляет собой «золотое сечение»), обладающий следующим свойством: если от этого прямоугольника отрезать возможно больший квадрат, то останется прямоугольник, подобный исходному (с тем же отношением сторон).

а) Найдите большую сторону такого прямоугольника, если меньшая сторона равна 1.

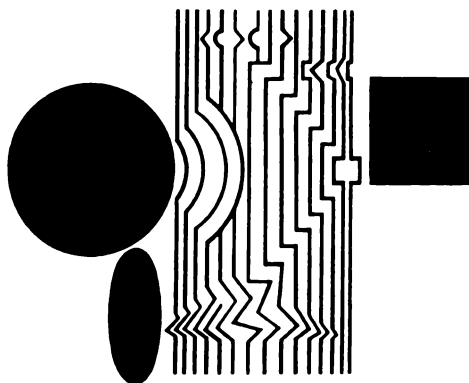
б) Расположите прямоугольник так, чтобы его большая сторона была горизонтальной. Отрежьте от него квадрат с правой стороны. От оставшегося прямоугольника отрежьте квадрат сверху, затем слева, снизу и т. д. по спирали. Покажите, что существует точка M внутри исходного прямоугольника, которая не попадает ни в один из отрезанных квадратов. Найдите расстояние от M до левой и нижней сторон исходного прямоугольника.

28. В треугольной пирамиде $ABCD$ известны длины ребер: $AB = 9$, $BC = 12$, $CA = 8$, $AD = 6$, $BD = 12$, $CD = 4$. Имеются ли среди граней пирамиды подобные между собой треугольники?

29. В треугольной пирамиде $ABCD$ выполняются равенства: $\angle ADB = \angle DBC = \angle ADC = \angle ABC$; $\angle ABD = \angle BDC = \angle DAC = \angle ACB$. Для каждого из пунктов а), б), в) выясните, существует ли такая пирамида и, если существует, найдите периметр треугольника ABC :

а) $DB = 10$, $DA = 8$; б) $DB = 27$, $CA = 8$; в) $DB = 21$, $BA = 8$.

Метрические соотношения в треугольнике и окружности



Прежде всего поясним, что означают слова «метрические соотношения». Здесь эти слова указывают на то, что речь пойдет о соотношениях между длинами тех или иных отрезков, связанных с треугольником и окружностью, о расстояниях между характерными точками в этих фигурах.

Центральное место в главе занимает знаменитая теорема Пифагора. Правда, доказательство этой теоремы, которое будет приведено, далеко от классического. Мы будем использовать методы, еще не открытые во времена Пифагора. (Великий древнегреческий математик и философ Пифагор жил в VI в. до н. э.)

Сегодня обычный школьник владеет математическими знаниями и методами, не известными такому великому и мудрому человеку,

как Пифагор. Несколько позднее мы вернемся к теореме Пифагора и приведем более близкое к классическому доказательство, которое, как и сама теорема, несмотря на древность, не потеряло своей красоты и важности.

И теоретическая, и практическая роль теоремы Пифагора необычайно важны. Благодаря этой теореме мы можем находить расстояния между точками, не измеряя этого расстояния непосредственно, даже не рассматривая прямую, проходящую через эти точки.

7.1. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора

Свойства высоты в прямоугольном треугольнике

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC . Будем в соответствии с геометрическими традициями считать, что прямым является угол при вершине C . Таким образом, гипотенузу AB мы будем обозначать буквой c , а катеты AC и BC — соответственно буквами b и a .

Опустим в этом треугольнике высоту CD на гипотенузу (рис. 183). Получившуюся картинку — прямоугольный треугольник с высотой, проведенной к гипотенузе, надо запомнить. Она отражает важное геометрическое свойство прямоугольного треугольника.

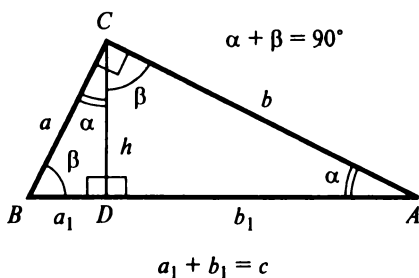


Рис. 183

Оказывается, *треугольники ABC , ACD и CBD подобны между собой*. Это непосредственно следует из второго признака подобия (равенство углов в этих треугольниках очевидно).

Прямоугольные треугольники — единственный вид треугольников, которые можно разрезать на два треугольника, подобных между собой и исходному треугольнику.

Мы специально записали обозначения этих трех треугольников в таком порядке следования вершин: ABC , ACD , CBD . Тем самым мы одновременно показываем и соответствие вершин. (Вершине A треугольника ABC соответствует также вершина A треугольника ACD и вершина C треугольника CBD и т. д.)

Поскольку гипотенуза треугольника ACD равна b , а гипотенуза треугольника CBD равна a , коэффициент подобия треугольника ACD по отношению к треугольнику ABC равен $\frac{b}{c}$, а для треугольника CBD он равен $\frac{a}{c}$.

Для удобства обозначим высоту CD через h , а отрезки гипотенузы AD и DB — через b_1 и a_1 соответственно.

Теорема 7.1.

В прямоугольном треугольнике справедливы следующие соотношения:

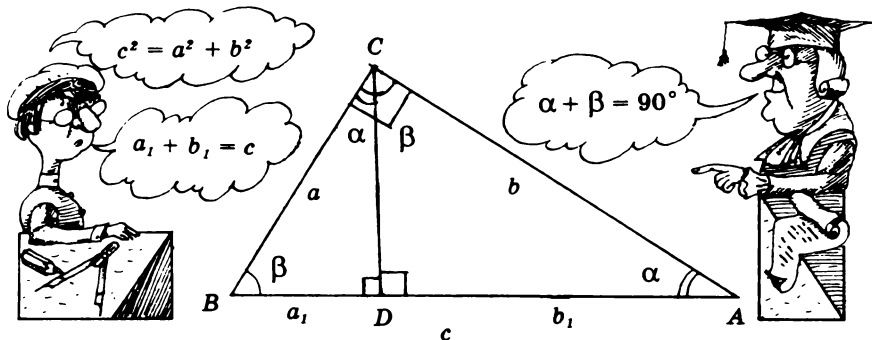
$$1) h^2 = a_1 \cdot b_1; \quad 2) b^2 = b_1 \cdot c; \quad 3) a^2 = a_1 \cdot c,$$

где b_1 и a_1 — проекции катетов b и a на гипотенузу.

Указанные соотношения иногда формулируют так:

Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, есть среднее пропорциональное между отрезками гипотенузы, на которые она этой высотой разделена.

Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.



(Напомним, что величина x является средним пропорциональным для величин m и n , если имеет место равенство $\frac{m}{x} = \frac{x}{n}$, откуда $x^2 = m \cdot n$.)

Доказательство. Все три соотношения непосредственно следуют из отмеченного нами подобия треугольников.

1. Треугольники ABC и CBD подобны. Значит,

$$\frac{b_1}{h} = \frac{h}{a_1}, \text{ откуда } h^2 = a_1 \cdot b_1.$$

2. Треугольники ABC и ACD подобны. Значит,

$$\frac{b_1}{b} = \frac{b}{c}, \text{ откуда } b^2 = c \cdot b_1.$$

3. Соотношение следует из подобия треугольников ABC и CBD . ▼

Теорема Пифагора

Теорема 7.2 (теорема Пифагора).

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Доказательство. Сложим почленно равенства 2) и 3) в теореме 7.1. Получим $b^2 + a^2 = c \cdot b_1 + c \cdot a_1 = c(b_1 + a_1) = c^2$. ▼

Вы возможно удивитесь и огорчитесь: «И это все доказательство?» Столько было сказано о важности этой теоремы, а ее доказательство свелось к двум строчкам. Здесь необходимо заметить, что, по существу, доказательство теоремы Пифагора началось с проведения высоты в прямоугольном треугольнике. Согласитесь, до этого надо еще додуматься.

Если же говорить о проблемах, которые возникали при доказательстве теоремы у древних геометров, то объяснялись они отсутствием алгебраического аппарата. Что такое отношение двух отрезков, они вполне четко понимали. А вот переход от равенства отношений к равенству произведений, который любой современный школьник воспринимает как очевидный, для древних геометров был просто невозможен. Произведение отрезков для них не имело геометрического смысла.

Теорема Пифагора формулировалась как равенство площадей. Именно в такой формулировке, сопровождаемая соответствующим доказательством, она становится истинной теоремой геометрии, одной из ее жемчужин. Поэтому мы еще вернемся к ней, когда начнем изучать площади плоских фигур.

Было бы несправедливо не отметить важность алгебраической формулировки теоремы Пифагора. Она позволяет при измерении расстояний в каком-то смысле «сойти с прямой», выйти в плоскость и далее — в пространство. Об этой важнейшей роли открытой Пифагором теоремы в теории и практике геометрии сам Пифагор мог лишь догадываться.

Заметим, что справедливо и утверждение, обратное теореме Пифагора.

Теорема, обратная теореме Пифагора

Теорема 7.3 (теорема, обратная теореме Пифагора).

Если в треугольнике со сторонами a , b и c выполняется равенство $c^2 = a^2 + b^2$, то этот треугольник прямоугольный, причем прямой угол противолежит стороне c .

Доказательство. Рассмотрим треугольник, стороны которого равны a и b , а угол между ними — прямой. По теореме Пифагора квадрат третьей стороны равен $a^2 + b^2$, т. е. эта сторона равна c . Значит, построенный нами треугольник равен данному по третьему признаку равенства треугольников. ▼

Исходя из свойств подобных треугольников, можно сформулировать теорему Пифагора в более общем виде.

Обобщенная теорема Пифагора

Теорема 7.4 (обобщенная теорема Пифагора).

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB . Рассмотрим какие-то три соответственных отрезка в треугольниках ABC , ACD и CBD (CD — высота в ABC). Обозначим их через l_c , l_b и l_a соответственно. Тогда справедливо равенство

$$l_c^2 = l_b^2 + l_a^2.$$

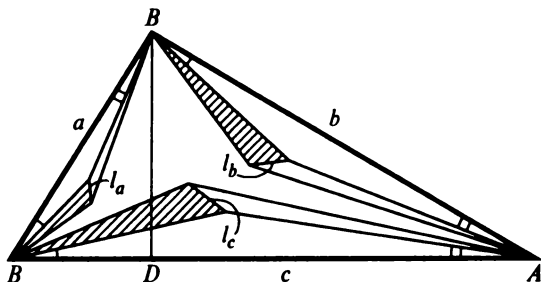


Рис. 184

Доказательство. Как мы знаем, треугольники ABC , ACD и CBD (рис. 184) подобны. Согласно свойству подобных треугольников, любые два соответственных отрезка в них относятся одинаково.

Это означает, что $\frac{l_c}{c} = \frac{l_b}{b} = \frac{l_a}{a}$ (рис. 184). Обозначим каждую из дробей через λ . Тогда $l_c = \lambda c$, $l_b = \lambda b$, $l_a = \lambda a$. И если мы теперь в равенстве $c^2 = b^2 + a^2$ умножим обе части почленно на λ^2 , то получим $l_c^2 = l_b^2 + l_a^2$. ▼

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

- 1(в). Прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами называются *египетскими*, а тройки целых чисел, для которых выполняется соотношение, связывающее стороны прямоугольного треугольника, — *пифагоровыми тройками*. Проверьте, что следующие тройки чисел являются пифагоровыми: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25. Проверьте также, что при любых m и n ($m > n$) числа $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ представляют собой пифагорову тройку.
2. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 опущена высота на гипотенузу. Найдите эту высоту и отрезки, на которые она делит гипотенузу.
3. Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 1 и 2. Найдите катеты этого треугольника.

4. Гипотенуза прямоугольного треугольника на 1 больше одного из катетов, а сумма катетов на 4 больше гипотенузы. Найдите гипотенузу этого треугольника.
5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5, а высота, проведенная к ней, равна 2. Найдите меньший катет этого треугольника.
- 6(в). Сторона равностороннего треугольника равна a . Найдите высоту этого треугольника, радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности.
7. В квадрат со стороной a вписан другой квадрат, вершины которого делят стороны данного в отношении 3 : 4. Найдите сторону вписанного квадрата.
- 8(в). Найдите диагональ квадрата со стороной a .
- 9(п). Докажите, что в данном треугольнике произведение его стороны на проведенную к ней высоту постоянно.
- 10(п). Высота прямоугольного треугольника делит его на два треугольника. Радиусы окружностей, вписанных в эти два треугольника, равны 1 и 2. Найдите радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.
- 11(в). Докажите, что в прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен медиане, проведенной к гипотенузе, и равен половине гипотенузы.
- 12(п). Докажите, что в прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности можно вычислить по формуле

$$r = \frac{1}{2} (a + b - c).$$

- 13(п). Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла является одновременно и биссектрисой угла между медианой и высотой, выходящими из этой вершины.
- 14(п). В треугольнике со сторонами 6, 7 и 9 проведена высота к большей стороне. Найдите высоту и отрезки, на которые сторона делится этой высотой.
15. Найдите основание равнобедренного треугольника, если высота, проведенная к основанию, равна 5, а высота, проведенная к боковой стороне, равна 6.

- 16(п).** Докажите, что если для сторон треугольника имеет место неравенство $a^2 + b^2 < c^2$, то высоты, опущенные на стороны a и b , проходят вне треугольника (т. е. угол между этими сторонами тупой).
- 17(п).** Основания трапеции равны 10 и 20, боковые стороны равны 6 и 8. Найдите угол, под которым пересекаются при продолжении боковые стороны трапеции.
- 18.** Найдите радиус окружности, вписанной в ромб, сторона которого равна 25, а одна из диагоналей 14.
- 19(п).** Докажите, что если радиусы окружностей равны R и r , а расстояние между их центрами a , то длина d общей внешней касательной к этим окружностям (расстояние между точками касания) может быть найдена по формуле $d^2 = a^2 - (R - r)^2$.
- 20(п).** На одной из сторон прямого угла взяты точки A и B на расстоянии a и b от вершины. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся другой стороны этого угла.
- 21(т).** Основания трапеции равны 20 и 10, а боковые стороны 6 и 8. Найдите радиус окружности, проходящей через концы меньшей боковой стороны и касающейся прямой, содержащей другую боковую сторону.
- 22(т).** В прямоугольном треугольнике ABC угол при вершине A равен 60° , O — середина гипотенузы AB , P — центр вписанной окружности. Найдите угол POC .
- 23(т).** Найдите катеты прямоугольного треугольника, в котором один из острых углов равен 15° , а гипотенуза равна 1.
- 24(т).** Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, делит этот треугольник на два. Расстояние между центрами окружностей, вписанных в эти треугольники, равно 1. Найдите радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.
- 25.** Три ребра, выходящие из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, равны a , b и c . Найдите длину диагонали этого параллелепипеда. (Получив нужную формулу, вы получите одно из возможных пространственных обобщений теоремы Пифагора.)

26(т). В пространстве даны точки A, B, C и D . Известно, что $AB = BC = 25$, $AD = DC = 39$, $AC = 30$, $BD = 56$. Докажите, что данные точки лежат в одной плоскости.

27(т). В пространстве даны точки A, B, C и D так, что $AC = BD = CD = 5$, $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{10}$, $AD = 2\sqrt{5}$. Докажите, что данные точки лежат в одной плоскости.

7.2. Тригонометрические функции.

Теоремы косинусов и синусов

Синус и косинус острого угла

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C и углом при вершине A , равным α (рис. 185).

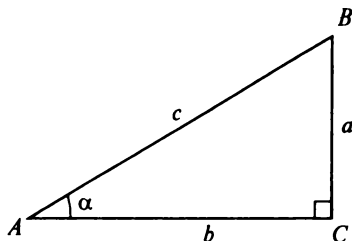


Рис. 185

Назовем **синусом** угла α отношение $\frac{BC}{AB}$, т. е. отношение противолежащего катета к гипотенузе. Запишем это в виде равенства

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

Косинус α есть отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Все прямоугольные треугольники с острым углом α подобны между собой. Поэтому указанные отношения, определяющие синус

и косинус, одинаковы для всех таких треугольников, а следовательно, зависят лишь от величины α , являются функцией α . Синус и косинус — две первые и самые важные тригонометрические функции. (Вторая часть слова «тригонометрия» — «метрия» означает, как мы знаем, «измерение». Так что «тригонометрия» — это дословно «измерение треугольников»). Тригонометрия — раздел математики, в котором изучаются свойства синуса, косинуса, тангенса, котангенса и других тригонометрических функций.

Если в равенстве $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора) поделить почленно обе части на c^2 , то получим

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,$$

или

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1.$$

Последнее равенство, тригонометрический эквивалент теоремы Пифагора, является основным тригонометрическим равенством (рис. 186). На нем основывается вся тригонометрия. Можно сказать, что вся тригонометрия проистекает из теоремы Пифагора.

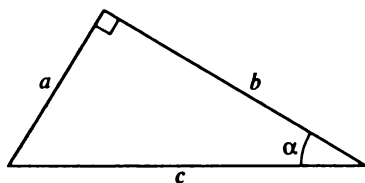


Рис. 186

Тангенс и котангенс острого угла

Кроме синуса и косинуса к числу наиболее часто встречающихся тригонометрических функций относятся тангенс (записывается tg) и котангенс (ctg):

$$\text{tg } \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{b}, \quad \text{ctg } \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}.$$

Тангенс есть отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенс — отношение прилежащего катета к противолежащему.

Из определений четырех рассмотренных тригонометрических функций следуют соотношения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Изменение тригонометрических функций на интервале $[0^\circ, 90^\circ]$

Рассмотрим теперь в прямоугольном треугольнике ABC угол при вершине B (см. рис. 185). Его величина дополняет до 90° угол A , т. е. он равен $90^\circ - \alpha$. С другой стороны, по отношению к этому углу катет AC является противолежащим, а катет BC — прилежащим. В соответствии с определением тригонометрических функций имеем:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AC}{AB} = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Проследим, как меняются значения введенных тригонометрических функций, когда угол изменяется от 0° до 90° .

Хотя при $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$ прямоугольного треугольника нет, понятно, что при $\alpha = 0^\circ$ мы должны положить $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$; а при $\alpha = 90^\circ$, наоборот, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$.

При возрастании угла от 0° до 90° синус возрастает от 0 до 1, а косинус убывает от 1 до 0. Причем каждая из этих функций пробегает все значения от 0 до 1. В этом нетрудно убедиться.

Рассмотрим четверть единичного круга, ограниченную дугой B_0BB_1 , один из концов которой — точка B_0 лежит на луче AC . Пусть C — проекция B на AB_0 , D — проекция B на AB_1 . Тогда $AC = \cos \alpha$, $AD = \sin \alpha$ (рис. 187). При перемещении точки B от B_0 к B_1 «видно», что $\sin \alpha$ возрастает от 0 до 1, а $\cos \alpha$ соответственно убывает от 1 до 0.

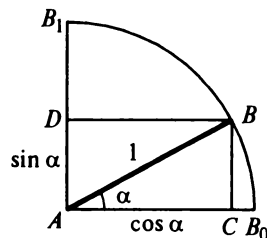


Рис. 187

Кроме значений синуса и косинуса для 0° и 90° , необходимо знать значения этих функций при α , равном 30° , 45° и 60° .

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с острым углом при вершине A , равным 30° (рис. 188). Построим точку B_1 , симмет-

ричную B относительно AC . В треугольнике ABB_1 все углы равны 60° . Значит, этот треугольник равносторонний, и

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}.$$

По теореме Пифагора, считая для удобства, что $AB = 1$, найдем $AC = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом,

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Для определения значений тригонометрических функций угла, равного 45° , рассмотрим прямоугольный треугольник, катеты которого равны 1 (рис. 189). Гипотенуза этого треугольника равна $\sqrt{2}$. Значит,

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Воспользовавшись формулами, выражающими тангенс и котангенс, получим, что $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$. Когда угол возрастает и приближается к 90° , возрастает и тангенс, становясь сколь угодно большим при приближении к 90° . Для угла 90° тангенс не существует ($\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, при изменении α от 0° до 90° числитель этой дроби возрастает от 0 до 1, а знаменатель убывает от 1 до 0).

Для котангенса все наоборот ($\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$). При уменьшении угла от 90° до 0° котангенс неограниченно возрастает. Для угла 0° котангенс не существует. Имеем:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

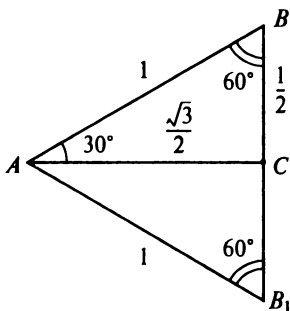


Рис. 188

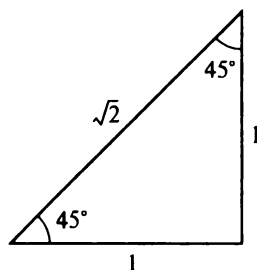


Рис. 189

Тригонометрические функции тупого угла

Определим теперь значения тригонометрических функций тупых углов.

Рассмотрим единичный полуокруг с центром A , ограниченный дугой $B_0B_1B_2$ (рис. 190; AB_1 — радиус, перпендикулярный диаметру B_0B_2). Возьмем на полуокружности точки B и B' , соответствующие углам α и $180^\circ - \alpha$. Эти точки симметричны относительно AB_1 , т. е. их проекции на AB_1 совпадают. Но $AD = \sin \alpha$. Естественно считать, что и $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

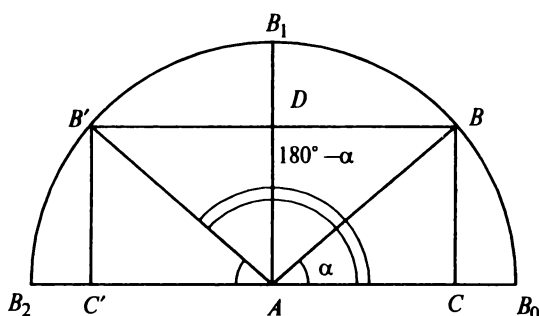


Рис. 190

Иначе обстоит дело с косинусом. Чтобы отличить лучи AB_0 и AB_2 , положим, что лучу AB_0 соответствует положительное направление, а лучу AB_2 — отрицательное. А так как точки C и C' симметричны относительно A и $AC = \cos \alpha$, то естественно считать, что $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

Во многих геометрических теоремах и формулах используются тригонометрические функции. Важнейшими являются теорема синусов и теорема косинусов.

Теорема косинусов

Теорема 7.5 (теорема косинусов).

Рассмотрим треугольник ABC , углы которого будем считать равными A , B и C , а противолежащие им стороны соответственно a , b и c . Тогда справедливо равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

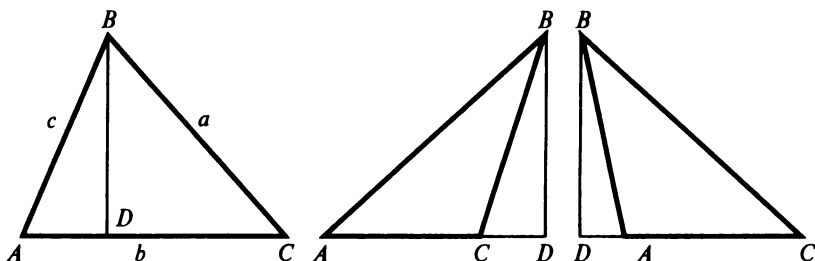


Рис. 191

Доказательство. Проведем в данном треугольнике ABC высоту BD (рис. 191). Учитывая определение синуса и косинуса, независимо от величины угла A имеем

$$CD = |b - c \cos A|, \quad BD = c \sin A.$$

Теперь по теореме Пифагора

$$\begin{aligned} a^2 &= BD^2 + CD^2 = (b - c \cos A)^2 + (c \sin A)^2 = \\ &= b^2 - 2bc \cos A + c^2(\cos^2 A + \sin^2 A) = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

Заметим, что теорему косинусов можно доказать, не используя теорему Пифагора. Проведя высоту BD (рис. 192), получим, что

$$b = c \cos A + a \cos C, \quad (1)$$

причем это равенство верно, каковы бы ни были углы A и C . Запишем еще два таких же равенства:

$$c = a \cos B + b \cos A; \quad (2)$$

$$a = b \cos C + c \cos B. \quad (3)$$

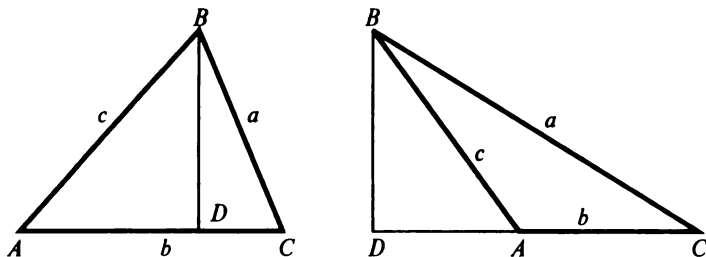


Рис. 192

Умножим теперь равенство (1) почленно на b , равенство (2) на c , а равенство (3) на $(-a)$ и сложим. Сокращая (проверьте), получим равенство

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A,$$

представляющее собой теорему косинусов, записанную немного иначе.

Теорема косинусов удобна для определения вида треугольника (является ли треугольник остроугольным, прямоугольным или тупоугольным). Ведь для этого достаточно определить знак косинуса, соответствующего наибольшему углу.

Если a — наибольшая сторона треугольника, то этот треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, больше нуля, равна нулю или меньше нуля величина $b^2 + c^2 - a^2$.

Теорема синусов

Теорема 7.6 (теорема синусов).

Обозначим стороны и углы треугольника ABC так же, как и в теореме косинусов, R — радиус описанной около ABC окружности. Тогда выполняются равенства:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Доказательство. Проведем в некоторой окружности хорду KM (рис. 193). Эта хорда делит окружность на две дуги. При этом вписанные углы, опирающиеся на хорду KM , с вершинами на разных дугах дополняют друг друга до 180° . Пусть углы с вершинами на большей дуге равны α . Противоположат им углы величиной $180^\circ - \alpha$. Как мы знаем, синусы этих углов равны.

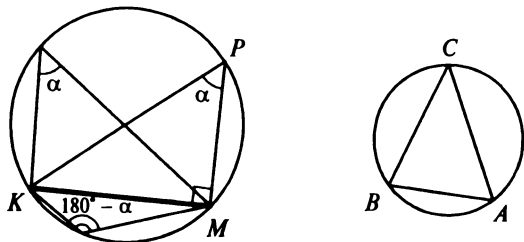


Рис. 193

Проведем в рассматриваемой окружности диаметр KP . Угол KPM равен α . Следовательно, $\frac{KM}{KP} = \sin \alpha$, или $\frac{KM}{\sin \alpha} = KP = 2R$.

Тем самым мы доказали теорему синусов, поскольку стороны треугольника ABC являются хордами описанной около него окружности, а углы треугольника ABC опираются на эти хорды. ▼

Теорема синусов бывает очень полезной в задачах, где требуется найти радиус описанной окружности, причем не только вокруг треугольника.

Формулы сложения для синуса и косинуса

Вообще, теоремы синусов и косинусов очень часто используют при решении всевозможных геометрических задач и доказательстве теорем. Покажем, как с помощью теоремы синусов можно получить формулу для $\sin(\alpha + \beta)$.

Пусть α и β — острые углы. Рассмотрим два прямоугольных треугольника ABD и ACD с общим катетом $AD = 1$, расположенных, как на рисунке 194. Пусть $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$. Тогда $BD = \operatorname{tg} \alpha$, $DC = \operatorname{tg} \beta$, $AB = \frac{1}{\cos \alpha}$, $\angle ACD = 90^\circ - \beta$. По теореме синусов для треугольника ABC ($\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$) имеем

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin(90^\circ - \beta)},$$

откуда $(\sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta)$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta).$$

Заменив $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ ($\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$,

$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$), получим очень важную формулу

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

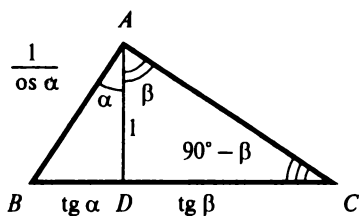


Рис. 194

Эта формула доказана нами при условии, что α и β — острые углы. На самом деле она верна при любых α и β .

Если α и β — острые углы и $\alpha > \beta$, то с помощью этого же приема нетрудно доказать, что

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

Аналогичные формулы для косинуса выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.\end{aligned}$$

Докажем, например, первую из формул. Имеем:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin((90^\circ - \alpha) - \beta) = \\ &= \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \beta - \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \sin \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.\end{aligned}$$

▲■● Задачи, задания, вопросы

1(в). Выпишите значения четырех тригонометрических функций для углов 0° , 30° , 45° , 60° , 90° , 120° , 135° , 150° , 180° .

2(в). Докажите равенства:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha.$$

3. Найдите $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$, если:

а) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$; б) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$;

в) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{2}$, где α — угол от 0 до 180° .

4. Постройте угол α , для которого:

а) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; б) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$; в) $\operatorname{tg} \alpha = 7$; г) $\operatorname{ctg} \alpha = -9$.

5(в). Определите вид треугольника (остроугольный, прямоугольный или тупоугольный), если известны его стороны:

а) 5, 6, 7; б) 5, 6, 8; в) 1, $\sqrt{17}$, 4;

г) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$; д) $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$; е) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

6. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 60° , $AB = 3$, $BC = 4$. Найдите сторону AC .
7. В треугольнике ABC угол при вершине A равен α , $AB = 1$, $BC = \alpha$. Найдите сторону AC . Сколько решений имеет задача в зависимости от величины a и α ?
8. Средняя сторона треугольника на 1 больше наименьшей и на 1 меньше наибольшей стороны. Косинус среднего по величине угла равен $\frac{2}{3}$. Найдите периметр этого треугольника.
9. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 6$. На стороне AB взята точка M так, что $BM = 2AM$, а на стороне BC взята точка K так, что $3BK = 2KC$. Найдите длину отрезка MK .
10. В треугольнике ABC известны стороны $AC = 2$, $AB = 3$, $BC = 4$. На прямой AC взята точка D , отличная от C так, что треугольник ABD подобен треугольнику ACB . Найдите BD , а также расстояние от D до середины BC .
11. В треугольнике ABC отрезок, соединяющий середины AB и BC , равен 3, сторона AB равна 7, угол C равен 120° . Найдите сторону BC .
- 12(п). Стороны треугольника равны a , b и c ; m_a — длина медианы, проведенной к стороне a . Докажите, что

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

13. В треугольнике со сторонами 3, 4 и 6 проведена медиана к большей стороне. Найдите косинус угла, образованного этой медианой с меньшей стороной треугольника.
- 14(пт). Вычислите значения тригонометрических функций для угла 15° .
- 15(пт). Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и углом при вершине, равным 36° . Докажите, что биссектриса угла при основании делит этот треугольник на два равнобедренных треугольника, один из которых подобен исходному. Опираясь на этот факт, найдите значения тригонометрических функций для угла 18° .

16. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно 75° и 60° . Чему равно отношение сторон AB и AC ?
- 17(п). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, две стороны которого равны a и b , а высота к третьей стороне равна h .
18. Одна сторона треугольника равна 2, прилежащие к ней углы равны 30° и 45° . Найдите две оставшиеся стороны треугольника.
- 19(в). Пусть основание равнобедренного треугольника равно a , боковые стороны равны b , высота, опущенная на основание, равна h . Выразите радиус описанной около этого треугольника окружности через любые две из трех величин: a , b и h .
20. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите радиус окружности, проходящей через вершины острых углов этого треугольника и середину большего катета.
21. Стороны треугольника равны 2, 3 и 4. Найдите радиус окружности, проходящей через концы большей и середину меньшей стороны.
- 22(п). Прямая, пересекающая основание равнобедренного треугольника и проходящая через противоположную вершину, делит этот треугольник на два. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны.
23. Дан квадрат со стороной 1. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину квадрата, середину одной из сторон, не содержащих этой вершины, и центр квадрата.
- 24(п). В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 1$. Найдите AD .
- 25(т). Найдите периметр треугольника, один из углов которого равен α , а радиусы вписанной и описанной окружностей равны соответственно r и R .
- 26(т). Найдите периметр четырехугольника, в котором $AB = CD = a$, $\angle BAD = \angle BCD = \alpha < 90^\circ$, $BC \neq AD$.
- 27(т). На окружности, описанной около треугольника ABC , взята точка M . Прямая MA пересекается с прямой BC в точке L , а прямая CM с прямой AB — в точке K . Известно, что $AL = a$, $BK = b$, $CK = c$. Найдите BL .

28(т). Точки A , B и C расположены на одной прямой. Через точку B проходит некоторая прямая. Пусть M — произвольная точка на этой прямой. Докажите, что расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM , не зависит от положения этой точки. Найдите это расстояние, если $AC = a$, $\angle MBC = \alpha$.

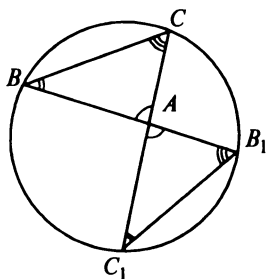
29. В пирамиде $ABCD$ известны ребра $AD = BC = a$, $BD = CA = b$, $CD = AB = c$. Найдите расстояния между серединами AD и BC .

30(т). В пространстве расположены четыре точки A , B , C и D . Известно, что $AB = AD = 15$, $BC = 7$, $CD = 25$, $AC = 20$, $BD = 24$. Докажите, что данные точки лежат в одной плоскости.

7.3. Соотношения между отрезками, возникающими при пересечении прямых с окружностью

Окружность и две пересекающие ее прямые

Рассмотрим на плоскости две прямые, пересекающиеся в точке A . Пусть некоторая окружность пересекает одну из этих прямых в точках B и B_1 , а другую — в точках C и C_1 . Возникающая при этом картина, часто встречающаяся в различных геометрических теоремах и задачах, обладает одним очень важным свойством. Оказывается, треугольники ABC и AC_1B_1 подобны между собой. Здесь мы вновь обозначили вершины треугольников так, чтобы они следовали в порядке соответствия (рис. 195). Заметим, что на самом деле на этом рисунке две пары подобных треугольников: ABC и AC_1B_1 , а также AB_1C и AC_1B . При этом совершенно неважно, где расположена точка A : вне или внутри круга.



$$\triangle ABC \sim \triangle AC_1B_1$$

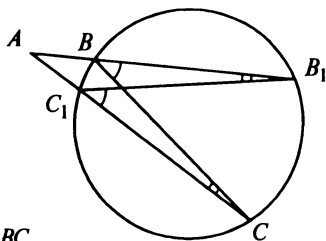


Рис. 195

Свойство хорд в окружности

Теорема 7.7.

Пусть точка A расположена внутри круга радиуса R на расстоянии a от его центра, BB_1 — произвольная хорда, проходящая через A . Тогда произведение $BA \cdot AB_1$ постоянно и

$$BA \cdot AB_1 = R^2 - a^2.$$

Иными словами, если через какую-то точку внутри круга провести две хорды, то произведение отрезков, на которые разделилась одна хорда, равно произведению отрезков для другой хорды.

Доказательство. Рассмотрим две хорды BB_1 и CC_1 , проходящие через A (рис. 196). Треугольники ABC и AC_1B_1 подобны по второму признаку подобия: углы с вершинами B и C_1 вписанные и опираются на одну дугу.

Таким образом, $\frac{AC}{AB_1} = \frac{AB}{AC_1}$, или $AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1$. В качестве хорды CC_1 можно взять диаметр. Тогда один из отрезков этой хорды равен $R - a$, а другой $R + a$. Значит, $AB \cdot B_1A = R^2 - a^2$. ▼

Свойство секущих к окружности

Теорема 7.8.

Пусть точка A расположена вне круга радиуса R на расстоянии a от его центра; прямая, проходящая через A , пересекает окружность в точках B и B_1 . Тогда произведения отрезков $AB \cdot AB_1$ постоянно и $AB \cdot AB_1 = a^2 - R^2$.

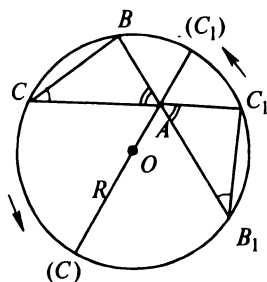


Рис. 196

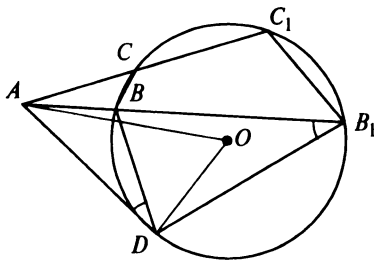


Рис. 197

При этом $a^2 - R^2$ есть квадрат касательной, проведенной из точки A к данной окружности.

Доказательство. Можно поступить так же, как и в предыдущем случае: проведем через A две секущие (прямые, пересекающие окружность), обозначим точки пересечения с окружностью соответственно через B и B_1 , C и C_1 (рис. 197). Из подобия треугольников ABC и AC_1B_1 (вновь по второму признаку; укажите, какие углы равны и почему) получим $\frac{AC}{AB_1} = \frac{AB}{AC_1}$, или $AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1$.

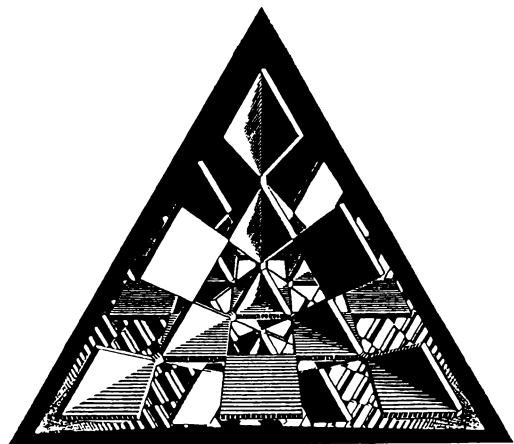
Можно, однако, вторую секущую заменить касательной. (Точки пересечения с окружностью как бы совпали.) Если AD — касательная, то подобными будут треугольники ABD и ADB_1 : угол A у них общий, кроме того, равны углы ADB и AB_1D , так как они измеряются половиной дуги DB , заключенной внутри угла ADB . Таким образом, $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AB_1}$, откуда $AB \cdot AB_1 = AD^2 = a^2 - R^2$. ▼

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

1. В окружности проведены две пересекающиеся хорды $AB = 7$, $CD = 5$. Точка их пересечения делит CD в отношении $2 : 3$. В каком отношении эта точка делит хорду AB ?
- 2(в). Две окружности пересекаются в точках A и B . Пусть M — любая точка прямой AB , расположенная вне отрезка AB . Докажите, что касательные к данным окружностям, выходящие из M , равны между собой.
- 3(т). $ABCD$ — четырехугольник, вписанный в окружность, M — точка пересечения его диагоналей. Известно, что $AB = 2$, $BC = 1$, $CD = 3$ и $CM : MA = 1 : 2$. Найдите AD .
4. Две стороны треугольника равны 3 и 5. Известно, что окружность, проходящая через середины этих сторон и их общую вершину, касается третьей стороны треугольника. Найдите третью сторону.

5. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 2$, $CA = 4$. В каком отношении делит сторону AC окружность, проходящая через вершины B , C и середину AB ?
6. В окружности проведена хорда, составляющая $\frac{3}{4}$ ее диаметра. Точка M , лежащая на этой хорде, делит ее в отношении $1 : 2$, а расстояние от M до центра окружности равно 1. Найдите радиус окружности.
7. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M . Известно, что $AM : MB = 2 : 3$, $CM : MD = 1 : 2$, $AC = 3$. Найдите BD .
- 8(п). В окружности проведены хорды AB и CD , пересекающиеся в точке M , причем $AM = 4$, $MB = 1$, $CM = 2$. Найдите угол OMC (O — центр окружности).
- 9(т). Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Окружность, проходящая через середины гипотенузы и меньшего катета, касается другого катета. Найдите длину хорды этой окружности, высекаемой на гипотенузе.
- 10(т). Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ известны отношения $AB : DC = 1 : 2$, $BD : AC = 2 : 3$. Найдите $DA : BC$.
- 11(п). Через точку M внутри окружности проведены три хорды. Известно, что M — середина двух хорд. В каком отношении точка M делит третью хорду?
- 12(т). На прямой расположены точки A , B , C и D , следующие друг за другом в указанном порядке. Известно, что $BC = 3$ и $AB = 2CD$. Через точки A и C проведена некоторая окружность, а через B и D — другая. Их общая хорда пересекает BC в точке K . Найдите BK .
- 13(т). Через некоторую точку, расположенную на общей хорде пересекающихся окружностей, проведены две прямые. Первая прямая пересекает одну из окружностей в точках A и B , вторая прямая пересекает другую окружность в точках C и D . Докажите, что точки A , B , C и D расположены на одной окружности.
14. В пирамиде $ABCD$ известны ребра $AB = 4$, $BC = 7$, $CA = 9$, $CD = 8$. Сфера, проходящая через A , B , D и середину CD , пересекает CB и CA в точках K и M . Найдите KM .

Задачи и теоремы геометрии



В этой главе вы познакомитесь с некоторыми фактами и теоремами геометрии, которые по тем или иным причинам оказались в стороне от выбранного нами пути построения геометрической теории. Кстати, заметим, что строить теорию геометрии можно по-разному, и выбранный путь отнюдь не является единственным.

По содержанию глава достаточно разнородна. Здесь рассматриваются некоторые теоремы, относящиеся к геометрии треугольника. Они лишь слегка «приоткрывают занавес», скрывающий богатый мир этой простейшей геометрической фигуры. В ней же содержится несколько параграфов, посвященных методам решений геометрических задач, в первую очередь, методам, так или иначе использующим

основные свойства подобия и метрические теоремы. Несколько обособлен параграф, в котором рассматриваются свойства вписанных и описанных четырехугольников.

8.1. Замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связан ряд точек, обладающих многими интересными, замечательными свойствами. Они так и называются **замечательными точками треугольника**. С некоторыми из них вы уже познакомились. Это центр описанной окружности — точка, в которой пересекаются серединные перпендикуляры к сторонам треугольника. Точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника является центром вписанной в треугольник окружности. Мы знаем также, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Как видим, все эти точки интересны уже тем, что в них пересекаются три определенные прямые.

Давайте вспомним, как мы доказывали соответствующие утверждения.

Центры вписанной и описанной окружностей. Основная идея рассуждения

Что касается центров вписанной и описанной окружностей, то здесь наши рассуждения были весьма сходными. Основывались они на свойствах соответствующих геометрических мест точек.

Как мы знаем, серединный перпендикуляр к отрезку представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от его концов. Поэтому, если мы проведем два серединных перпендикуляра к сторонам AB и BC треугольника ABC (рис. 198), то точка их пересечения, а они обязательно пересекутся (почему?), будет равноуда-



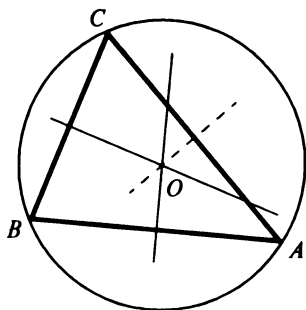


Рис. 198

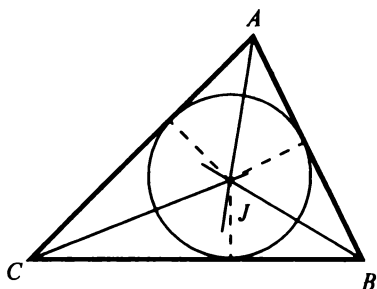


Рис. 199

лена от вершин A и B , а также от B и C . Таким образом, получившаяся точка O равноудалена от всех трех вершин треугольника, и окружность с центром в O радиусом OA проходит через все вершины треугольника и является описанной окружностью. Понятно, что через O проходит и серединный перпендикуляр к AC .

Обратно, если какая-то точка равноудалена от всех вершин треугольника, то она расположена на серединных перпендикулярах к AB и BC , т. е. совпадает с O .

Рассмотрим теперь центр вписанной окружности. Будем рассуждать аналогично. Биссектриса угла является геометрическим местом точек, равноудаленных от его сторон. (Рассматриваются лишь точки внутри угла.) Обозначим через J точку пересечения биссектрис углов A и B треугольника ABC (рис. 199). Эта точка равноудалена от сторон AB и BC , а также от сторон BA и BC . Значит, она равноудалена от всех трех сторон треугольника, поэтому существует окружность с центром в J , которая касается всех трех сторон треугольника, т. е. является вписанной для треугольника ABC . Кроме того, через точку J обязана пройти и биссектриса угла C .

Так же, как и в предыдущем случае, проводится обратное рассуждение. Если некоторая окружность касается всех сторон треугольника, то ее центр должен лежать на биссектрисах углов A и B , а значит, он совпадает с J .

В § 5.4 доказывалось, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Там мы использовали *метод вспомогательной окружности*. Сейчас мы приведем другое, также весьма интересное доказательство этого факта, дающее важные следствия для теории.

Теорема о высотах. Второе доказательство

Теорема 8.1.

Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 200). Проведем через его вершины прямые, параллельные противоположным сторонам. Эти три прямые образуют треугольник $A_0B_0C_0$. Стороны треугольника ABC являются средними линиями треугольника $A_0B_0C_0$. В самом деле, ACB_0 — параллелограмм. Значит, $AC_0 = CB$. Аналогично $AB_0 = CB$. Следовательно, A — середина C_0B_0 . То же верно и для других вершин B и C .

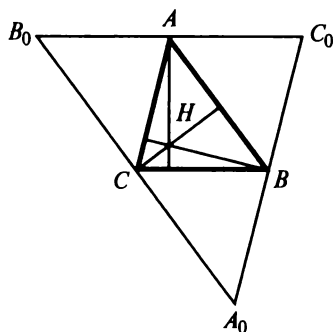


Рис. 200

Проведем теперь высоты в треугольнике ABC . Соответствующие прямые, на которых лежат высоты, являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_0B_0C_0$, а значит, пересекаются в одной точке. При этом точка их пересечения является центром окружности, описанной около треугольника $A_0B_0C_0$. ▼

«Картинка», образованная треугольниками ABC и $A_0B_0C_0$, позволяет сделать еще целый ряд интересных выводов.

Теорема о медианах треугольника. Прямая Эйлера

Теорема 8.2.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1 (считая от вершин).

Три замечательные точки треугольника: центр описанной окружности, точка пересечения медиан и точка пересечения высот лежат на одной прямой.

Эта прямая называется *прямой Эйлера*. Она названа по имени одного из величайших математиков Леонарда Эйлера (1707—1783). По количеству великолепных научных трудов, оказавших влияние на развитие науки, этому ученому нет равных в мире. Родившись в Швейцарии, Леонард Эйлер долгие годы прожил в России. В России же он

создал большинство своих работ; здесь же он и умер. Так что мы с полным основанием можем считать его российским математиком.

Доказательство. Пусть D — середина стороны BC треугольника ABC , O — центр описанной около треугольника ABC окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 201). Как мы знаем из предыдущего рассуждения, H — центр окружности, описанной около треугольника $A_0B_0C_0$. Но треугольник $A_0B_0C_0$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия 2. Точке H треугольника $A_0B_0C_0$ соответствует точка O треугольника ABC . Отрезки AH и OD являются для этих треугольников соответствующими. Значит, $AH = 2OD$. Кроме того, AH и OD параллельны.

Обозначим через M точку пересечения AD с OH . Из подобия треугольников AHM и DOM находим: $2OM = HM$.

Итак, точка M делит отрезок OH в отношении 2 : 1, а медиана AD проходит через M и также делится этой точкой в отношении 2 : 1.

Такие же рассуждения справедливы для любой медианы треугольника. Это означает, что все три медианы проходят через одну и ту же точку M отрезка OH , т. е. пересекаются в одной точке и, как мы показали, делятся этой точкой в отношении 2 : 1. Таким образом, все утверждения теоремы доказаны. ▼

Приведем еще одно доказательство теоремы о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. Оно проще только что рассмотренного, хотя и не так богато геометрическими следствиями.

Рассмотрим треугольник ABC , D и E — середины BC и AC (рис. 202). Обозначим через M точку пересечения AD и BE . Поскольку ED — средняя линия треугольника ABC , из ее свойств следует, что треугольники ABM и DEM подобны. Коэффициент подобия равен 2 ($\frac{AB}{DE} = 2$).

Таким образом, точка пересечения любых двух медиан делит каждую из них в отношении 2 : 1 ($\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{ME} = \frac{AB}{DE} = 2$).

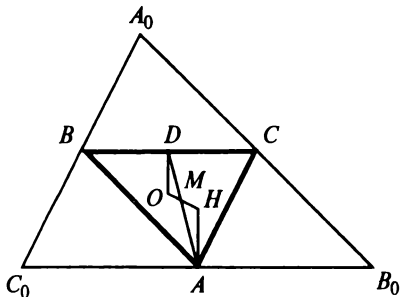


Рис. 201

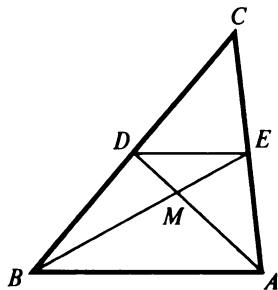


Рис. 202

Из этого следует, что все три медианы должны пересекаться в одной точке — точке M . (Если мы проведем медиану из вершины C , то она разделит AD в том же отношении $2 : 1$, т. е. пройдет через точку M .) ▼

* Три роли одной точки

Итак, мы установили, что точка H (см. рис. 201) является точкой пересечения высот треугольника ABC с центром описанной окружности для треугольника $A_0B_0C_0$. Но этим ее свойства далеко не исчерпываются.

В главе 5 предлагалась следующая задача.

Задача. Докажите, что в остроугольном треугольнике точка пересечения высот является центром окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются основания высот данного.

Если вы в свое время с этой задачей не справились или пропустили ее, не беда, сейчас мы приведем решение.

Решение. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , H — точка их пересечения (рис. 203). Точки C , A_1 , H и B_1 лежат на одной окружности с диаметром HC . Следовательно, $\angle HB_1A_1 = \angle HCA_1$, поскольку в этой вспомогательной окружности они опираются на одну дугу. Точно так же $\angle HB_1C_1 = \angle HAC_1$. Докажем равенство углов $\angle HCA_1 = \angle HAC_1$. Это то же самое, что и равенство $\angle C_1CB = \angle A_1AB$. Но в прямоугольных треугольниках C_1CB и A_1AB имеется общий угол — угол B треугольника ABC . Следовательно, $\angle C_1CB = \angle A_1AB$, а значит, $\angle HB_1A_1 = \angle HB_1C_1$, т. е. B_1H — биссектриса угла B_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

Аналогично докажем, что биссектрисами являются HA_1 и HC_1 . Утверждение задачи доказано. ▼

Рассмотрим теперь три треугольника: ABC , $A_1B_1C_1$ и $A_0B_0C_0$. (Как связаны треугольники ABC и $A_0B_0C_0$ было показано при доказательстве теоремы 8.1.) Точка пересечения высот треугольника ABC — точка H — является для треугольника $A_0B_0C_0$ центром описанной окружности, а для треугольника $A_1B_1C_1$ — центром вписанной окружности (рис. 204).

Напомним, что рисунок 204 соответствует остроугольному треугольнику ABC . А что будет, если ABC тупоугольный треугольник? Прежде чем ответить на этот вопрос, введем еще одно понятие. Оказывается, что у каждого треугольника имеется четыре (!) окружности, касающиеся всех трех прямых, образующих этот треугольник.

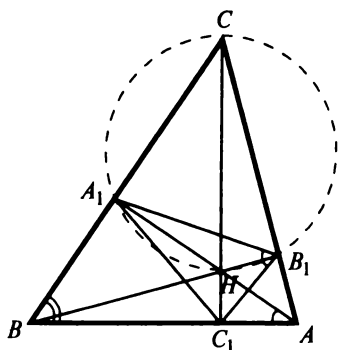


Рис. 203

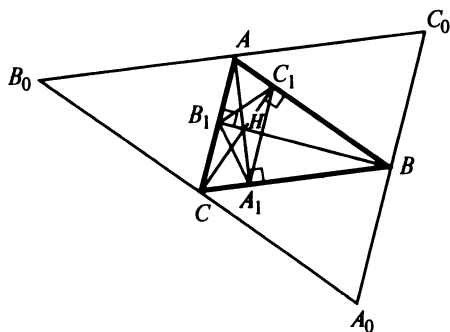


Рис. 204

Одна из них — это известная вам вписанная окружность. Три другие называются **внеписанными** окружностями. Их центры расположены вне данного треугольника.

* Внеписанные окружности треугольника

Рассмотрим треугольник ABC . Проведем биссектрисы углов, внешних к углам B и C (рис. 205). (Эти биссектрисы перпендикулярны соответствующим биссектрисам внутренних углов.)

Точка их пересечения — обозначим ее J_a — равноудалена от лучей AB и BC и от лучей AC и CB . Значит, J_a равноудалена от всех трех прямых AB , BC и CA , поэтому существует окружность с центром в J_a , касающаяся стороны BC и продолжений сторон AB и AC . Через J_a проходит также и биссектриса угла A треугольника ABC .

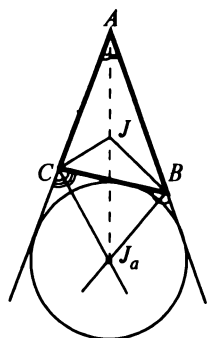


Рис. 205

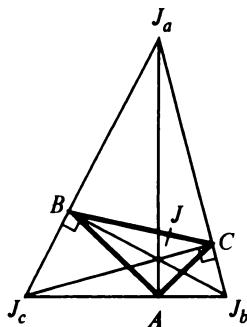


Рис. 206

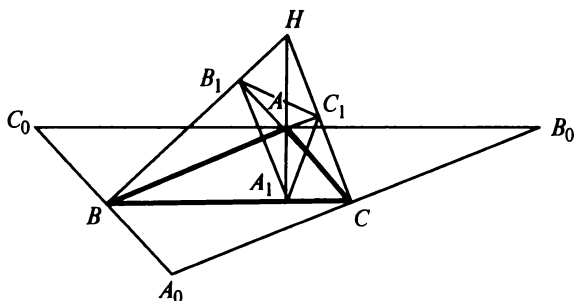


Рис. 207

Точно так же получаются две другие внеписанные окружности с центрами J_b и J_c . На рисунке 206 построены все четыре центра вписанной и внеписанных окружностей для треугольника ABC .

Как видно, для треугольника $J_a J_b J_c$ отрезки $J_a A$, $J_b B$, $J_c C$ являются высотами, J — точка пересечения высот.

Давайте еще раз рассмотрим треугольники $A_0 B_0 C_0$, ABC и $A_1 B_1 C_1$, где A , B , C — середины сторон треугольника $A_0 B_0 C_0$, а A_1 , B_1 , C_1 — основания высот треугольника ABC , H — точка их пересечения.

Пусть угол при вершине A тупой (рис. 207). В этом случае точка H , как и раньше, является для треугольника $A_0 B_0 C_0$ центром описанной окружности. Для треугольника $A_1 B_1 C_1$ она будет центром внеписанной окружности.

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

-
- 1(в). Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 10° и 100° . Найдите углы BOC , COA , AOB , где O — центр описанной окружности.
 - 2(в). Докажите, что в остроугольном треугольнике центр описанной окружности находится внутри треугольника, а для тупоугольного — вне его.
 - 3(в). Найдите углы треугольника, если его стороны видны из центра описанной окружности под углами:
а) 110° , 130° , 120° ; б) 10° , 30° , 40° .
 - 4(п). В треугольнике ABC угол A равен α . Пусть J — центр вписанной в этот треугольник окружности, а J_a , J_b — центры

двух внеписанных окружностей (J_a касается стороны BC , J_b — стороны AO). Найдите углы $\angle BJC$, $\angle BJ_aC$, $\angle BJ_bC$.

5. Внутри треугольника ABC взята точка M . Известно, что угол A равен 30° , угол B равен 70° . Треугольник BMC является равносторонним. Найдите угол MAB .

6(п). Шестиугольник $AKBPCM$ вписан в окружность. Известно, что $AK = KB$, $BP = PC$, $CM = MA$. Докажите, что диагонали AP , KC и BM этого шестиугольника пересекаются в одной точке. Оказывается, точка их пересечения для каждого из треугольников ABC и KPM является известной вам замечательной точкой. Какой?

7(в). Докажите, что точка пересечения медиан треугольника с вершинами в серединах сторон данного совпадает с точкой пересечения медиан данного треугольника.

8(п). Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и CDA лежат на диагонали BD и делят ее на три равные части.

9. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке A . Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , совпадает с серединой дуги BC , расположенной внутри треугольника.

10(т). В треугольнике ABC угол A равен α , H — точка пересечения высот. Чему может быть равен угол BHC ?

11(пт). Пусть O — центр описанной, J — центр вписанной в треугольник ABC окружности, H — точка пересечения его высот. Докажите, что если угол A равен 60° , то точки B , C , O , J , H лежат на одной окружности. Чему равен угол OJC ?

12. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что A — точка пересечения высот треугольника BHC .

13(п). Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC , AHB , BHC , CHA , равны между собой.

14(п). Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно его сторон, лежат на описанной около этого треугольника окружности.

- 15(п).** Докажите, что из медиан любого треугольника можно построить треугольник (т. е. что существует треугольник, стороны которого равны медианам любого указанного треугольника).
- 16(п).** Пусть AA_1 , AA_2 , AA_3 — соответственно высота, биссектриса и медиана, выходящие из вершины A треугольника ABC ; AA_2 при продолжении пересекает описанную около ABC окружность в точке D . Докажите, что DA_3 параллельна AA_1 . Докажите также, что A_2 расположена между A_1 и A_3 .
- 17.** Используя формулу, выражающую медиану через стороны треугольника (задача 12 к § 7), найдите отношение суммы квадратов медиан к сумме квадратов сторон треугольника.
- 18(пп).** Постройте треугольник по высоте, биссектрисе и медиане, выходящим из одной вершины.
- 19(п).** Постройте треугольник по трем медианам.
- 20(пп).** Пусть B и C — фиксированные точки окружности; A — произвольная точка на ней. Найдите геометрическое место следующих точек:
 а) пересечения высот треугольника ABC ;
 б) пересечения биссектрис треугольника ABC ;
 в) пересечения медиан треугольника ABC .
- 21(т).** Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что расстояние между серединами BC и AH равно радиусу описанной около треугольника ABC окружности.
- 22(т).** На стороне AB треугольника ABC построен прямоугольник $ABDE$. Из точек E и D проведены прямые, перпендикулярные CB и AC соответственно. Обозначим через M точку их пересечения. Докажите, что прямая CM перпендикулярна AB .
- 23(т).** Пусть R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей некоторого треугольника. Докажите, что $R \geq 2r$.
- 24.** Пусть O , J , M , H — соответственно центры описанной, вписанной окружностей, точка пересечения медиан и точка пересечения высот некоторого треугольника. Докажите, что если две любые из этих точек совпадают, то треугольник равносторонний.
- 25(п).** Пусть J — центр вписанной в треугольник ABC окружности, прямая AJ пересекает описанную окружность в точке D . Докажите, что $JD = DB = DC$.

- 26(т). Пусть J — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников AJB , BJC , CJA , лежат на описанной около данного треугольника ABC окружности.
27. В обозначениях задачи 25 выразите отрезки JD и AJ через R и r (радиусы вписанной и описанной окружностей) и угол A .
- 28(т). Докажите формулу Эйлера: $d^2 = R^2 - 2Rr$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника, d — расстояние между их центрами.
29. Докажите, что четыре отрезка, соединяющие вершины треугольной пирамиды с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 3 : 1.

8.2. Некоторые теоремы и задачи геометрии.

Метод подобия

В предыдущем параграфе мы двумя способами доказали, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. В обоих случаях было использовано подобие некоторых треугольников, возникших в результате дополнительных построений. По существу, в этом и состоит метод подобия.

Очень часто метод подобия оказывается удобным при доказательстве теорем или при решении задач, в которых речь идет об отношениях отрезков.

Одно свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника

Вот как, например, можно доказать одну важную теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника.

Теорема 8.3.

Если AA_1 — биссектриса внутреннего угла A треугольника ABC , то

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{AC}.$$

Иными словами, *биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные заключающим ее сторонам.*

Доказательство. Проведем через B прямую, параллельную AC , и обозначим через D точку пересечения этой прямой с продолжением AA_1 (рис. 208).

Согласно свойству параллельных прямых имеем $\angle BDA = \angle CAD$. Так как AA_1 — биссектриса, то $\angle CAD = \angle DAB$. Итак, $\angle BDA = \angle DAB$, поэтому $BD = BA$.

Из подобия треугольников CAA_1 и BDA_1 (по второму признаку $\angle BDA_1 = \angle CAA_1$,

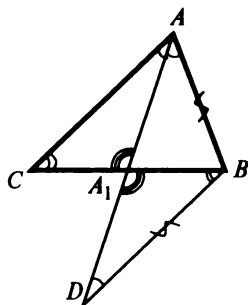


Рис. 208

$\angle BA_1D = \angle CA_1A$) получаем $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BD}{AC} = \frac{BA}{AC}$, что и требовалось доказать.

Заметим, что можно было бы с тем же успехом провести через B прямую, параллельную биссектрисе AA_1 , до пересечения в точке E с продолжением CA (рис. 209). Тогда $EA = AB$ и $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CA}{AE} = \frac{CA}{AB}$. ▼

* Пересекающиеся отрезки в треугольнике

Прием, использованный при доказательстве теоремы 8.3, помогает и при решении следующей задачи.

Задача 1. На стороне AC треугольника ABC взята точка M , а на стороне BC — точка K так, что $AM : MC = 2 : 3$, $BK : KC = 4 : 3$. В каком отношении AK делит отрезок BM ?

Решение. Проведем через B прямую, параллельную AC , и обозначим через P точку ее пересечения с продолжением AK (рис. 210).

Из подобия треугольников BKP и CKA имеем $\frac{BP}{AC} = \frac{BK}{KC} = \frac{4}{3}$, т. е.

$BP = \frac{4}{3} AC$. Кроме того, заметим, что $AM = \frac{2}{5} AC$.

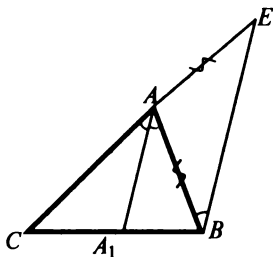


Рис. 209

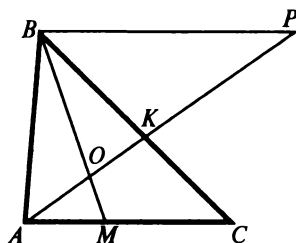


Рис. 210

Теперь из подобия треугольников BPO и MOA , где O — точка пересечения AK и BM , получим

$$\frac{BO}{OM} = \frac{BP}{AM} = \frac{\frac{4}{3}AC}{\frac{2}{5}AC} = \frac{10}{3}. \blacktriangledown$$

В некоторых случаях можно вообще обойтись без дополнительных построений, поскольку подобные треугольники уже имеются на чертеже. Самое главное — увидеть их.

* Формула длины биссектрисы треугольника

Задача 2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_1 . На стороне AC взята точка K так, что $CK = CA_1$, а на продолжении стороны AB за точку B взята точка M так, что $BM = A_1B$. Найдите AA_1 , если $AK = k$, $AM = m$.

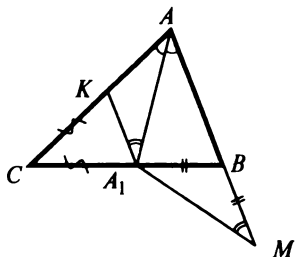


Рис. 211

Решение. Оказывается, треугольники AKA_1 и AA_1M подобны по второму признаку подобия (рис. 211). Найти одну пару равных углов в этих треугольниках легко. Ведь AA_1 — биссектриса, значит, $\angle KAA_1 = \angle A_1AM$.

Далее, угол A_1MA равен половине угла B треугольника ABC , так как $\angle ABC$ является внешним для равнобедренного треугольника A_1MB ($A_1B = BM$).

Найдем угол AA_1K :

$$\begin{aligned} \angle AA_1K &= 180^\circ - \frac{A}{2} - \angle AKA_1 = 180^\circ - \frac{A}{2} - (180^\circ - \angle CKA_1) = \\ &= \angle CKA_1 - \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(180^\circ - C) - \frac{A}{2} = \\ &= 90^\circ - \frac{A+C}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ - B}{2} = \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Подобие треугольников AKA_1 и AA_1M доказано.

Теперь получаем

$$\frac{AK}{AA_1} = \frac{AA_1}{AM}, \text{ или } AA_1 = \sqrt{AK \cdot AM} = \sqrt{km}. \blacktriangledown$$

Только что решенная задача, а также теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника (теорема 8.3) позволяют доказать формулу для длины биссектрисы треугольника.

Задача 3. Докажите, что если AA_1 — биссектриса внутреннего угла треугольника ABC , то

$$AA_1^2 = BA \cdot AC - BA_1 \cdot A_1C.$$

Другими словами, квадрат биссектрисы внутреннего угла треугольника равен произведению сторон, ее заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, возникающих при пересечении ее с биссектрисой.

Решение. Как следует из задачи 2 (см. рис. 211),

$$\begin{aligned} AA_1^2 &= AK \cdot AM = (AC - CA_1)(AB + BA_1) = \\ &= AC \cdot AB - CA_1 \cdot A_1B + (AC \cdot BA_1 - AB \cdot CA_1). \end{aligned}$$

По теореме 8.3 о биссектрисе $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}$. Значит, выражение в скобках равно нулю. Задача решена.

Приведем еще одно решение этой задачи, также использующее подобие и одно стандартное дополнительное построение. Это дополнительное построение состоит в следующем: опишем около треугольника ABC окружность и продолжим биссектрису угла A до пересечения с этой окружностью в точке D (рис. 212).

Мы знаем, что $CA_1 \cdot A_1B = AA_1 \cdot A_1D$.

Кроме того, из подобия треугольников CAA_1 и DAB ($\angle CAA_1 = \angle DAB$, $\angle ACA_1 = \angle ADB$) следует, что

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AA_1}{AB} \text{ или } AC \cdot AB = AA_1 \cdot AD.$$

Запишем два получившихся равенства:

$$AA_1 \cdot A_1D = CA_1 \cdot A_1B,$$

$$AA_1 \cdot AD = BA \cdot AC.$$

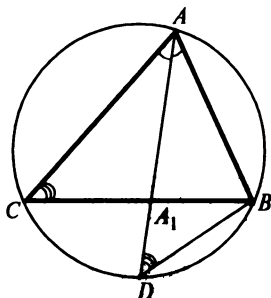


Рис. 212

Вычтем из второго равенства первое. Поскольку $AD - A_1D = AA_1$, имеем $AA_1^2 = BA \cdot AC - BA_1 \cdot A_1C$. ▼

* Одно свойство трапеции

Естественным образом подобные треугольники возникают в различных задачах на трапецию. Решим одну такую задачу (она предлагалась ранее для самостоятельного решения — задача 21 к § 6.3), в которой утверждается также и полезный факт.

Задача 4. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и через точку пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

Решение. Обозначим через E и F середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$; K — точка пересечения ее диагоналей, M — точка пересечения продолжений боковых сторон (рис. 213).

Заметим, что точки M , E и F лежат на одной прямой. Это следует из подобия треугольников BMC и AMD . В каждом из них отрезки ME и MF соответственно являются медианами, а значит, они делят угол при вершине M на одинаковые части.

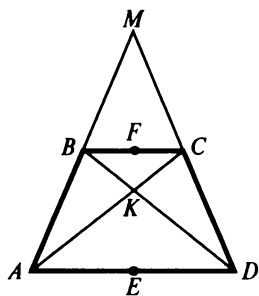


Рис. 213

Точно так же на одной прямой расположены точки K , E и F . (Здесь это следует из подобия треугольников BKC и DKA .) Значит, все четыре точки M , E , K и F лежат на одной прямой, т. е. прямая MK проходит через E и F . ▼

* Задачи, задания, вопросы

.....

1. В четырехугольнике стороны равны (в порядке обхода) 8, 6, 9, 12. Докажите, что биссектрисы двух противоположных углов четырехугольника пересекаются на его диагонали.

2(в). В треугольнике ABC известны две стороны: $AB = 2$, $AC = 3$. В каком отношении биссектриса угла A делит медиану, проведенную к стороне AC ?

3(п). В каком отношении делит сторону BC треугольника ABC прямая, проходящая через A и середину медианы, выходящей из D ?

4. Докажите, что две прямые, проходящие через одну вершину параллелограмма и середины противоположных этой вершине сторон, делят диагональ параллелограмма на три равные части.

5(п). На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки K и M так, что $AK : AB = BM : BC = 1 : 3$. В каком отношении точка пересечения CK и AM делит каждый из этих отрезков?

6. В прямоугольном треугольнике с катетами, равными 3 и 4, проведены биссектрисы острых углов. Найдите расстояния между концами этих биссектрис, лежащих на катетах.

7. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$, AA_1 — биссектриса угла A этого треугольника, J — центр вписанной окружности. Найдите AA_1 , AJ .

8(п). В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки K и M ;

O — точка пересечения CK и AM . Обозначим $\frac{AK}{KB} = k$, $\frac{BM}{MC} = m$,

$\frac{CO}{OK} = p$, $\frac{AO}{OM} = l$. Пусть из четырех чисел k , m , p и l известны два. Найдите два оставшихся числа, если:

а) $k = 2$, $m = \frac{1}{3}$; б) $k = \frac{2}{3}$, $m = \frac{1}{2}$; в) $k = 3$, $p = 2$;

г) $k = 2$, $l = 3$; д) $m = \frac{1}{3}$, $l = \frac{1}{3}$; е) $p = 2$, $l = 1$.

9(п). В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки K и M , прямая KM пересекает прямую AC в точке P . Найдите $CP : AP$, если:

а) $AK : KB = 2$, $BM : MC = 1 : 3$;

б) $AK : KB = 3$, $BM : MC = 4$;

в) $AK : KB = 2 : 5$, $BM : MC = 2$.

- 10(т). Две окружности пересекаются в точках A и B . В каждой из этих окружностей проведены хорды AC и AD так, что хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB , если $CB = a$, $DB = b$.
- 11(т). В треугольнике ABC точка O является центром описанной окружности. Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная AO и пересекающая прямую AC в точке K , а через вершину C проведена прямая, также перпендикулярная AO и пересекающая AB в точке M . Найдите BC , если $BK = a$, $CM = b$.
- 12(т). Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A . Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке D . Прямая AD вторично пересекает большую окружность в точке M . Найдите MB , если $MA = a$, $MD = b$.
- 13(т). В треугольнике ABC через вершину A проведена прямая l , касающаяся описанной около этого треугольника окружности. Найдите высоту треугольника ABC , проведенную к стороне BC , если расстояния от B и C до l равны a и b .
- 14(т). К окружности проведены две прямые, касающиеся ее в точках A и B . Пусть M — произвольная точка на окружности. Найдите расстояние от M до AB , если расстояния от M до касательных равны a и b .
- 15(т). Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекают высоту, проведенную к стороне BC , в точках K и M . Найдите радиус окружности, описанной около ABC , если $AK = a$, $AM = b$.
- 16(т). Около окружности описана равнобокая трапеция. Боковая сторона трапеции равна a , отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью, равен b . Найдите диаметр окружности.
- 17(т). В окружности проведен диаметр AB . Другая окружность с центром в B пересекает первую в точках C и D ; M — точка первой окружности внутри второй. Отрезок AM пересекает вторую окружность в точке E . Найдите ME , если $MC = a$, $MD = b$.

18(т). Биссектриса угла C треугольника ABC делит сторону AB на отрезки, равные a и b ($a > b$). Касательная к окружности, описанной около треугольника ABC , проходящая через C , пересекает прямую AB в точке D . Найдите CD .

19. В треугольной пирамиде $ABCD$ на ребрах AB , BD и DC взять соответственно точки K , M и P так, что $\frac{AK}{KB} = 1$, $\frac{BM}{MD} = 2$, $\frac{DP}{PC} = 3$.

Через точки K , M и P проходит плоскость, пересекающая прямые AD , BC и CA в точках E , F и G . Найдите $\frac{AE}{ED}$, $\frac{BF}{FC}$, $\frac{CG}{GA}$.
Какие из точек E , F и G расположены на ребрах пирамиды?

8.3. Построение отрезка по формуле.

Метод подобия в задачах на построение

В начале этого параграфа мы решим несколько стандартных задач на построение отрезка по заданной формуле. Или, более точно, построение отрезка, длина которого выражается через длины данных отрезков с помощью заданной формулы.

Набор простейших задач, который мы рассмотрим, служит основой алгебраического метода решения задач на построение. Суть метода состоит в том, что данная задача на построение сводится к построению какого-то неизвестного отрезка. Этот отрезок оказывается возможным выразить через известные отрезки и величины. Находится формула, дающая такое выражение. Затем предлагается способ построения отрезка по найденной формуле. Этот способ обычно состоит в том, что, используя стандартный набор построений, мы строим сначала несколько вспомогательных отрезков, а затем уже искомый отрезок.

Построение отрезка по формуле $x = \frac{bc}{a}$

Задача 1. Даны три отрезка a , b и c . Постройте отрезок x , выражающийся через a , b и c по формуле $x = \frac{bc}{a}$.

Заметим, что равенство $x = \frac{bc}{a}$ эквивалентно равенству $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, которое означает, что x является четвертым пропорциональным отрезком для отрезков a , b и c .

Решение. Построение основано на теореме о пропорциональных отрезках. На одной стороне произвольно угла от вершины последовательно отложим отрезки a и c , а на другой — отрезок b (рис. 214). Проведем прямую l через концы отрезков a и b , а затем через другой конец отрезка c проведем прямую, параллельную l . Две эти параллельные прямые ограничат примыкающий к b нужный отрезок x . Ведь по указанной теореме $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. ▼

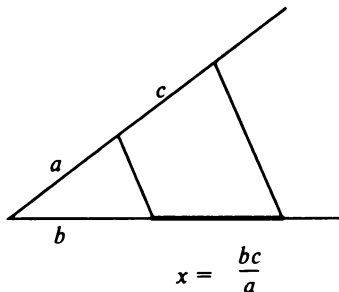


Рис. 214

Построения, основанные на свойствах прямоугольного треугольника

Задача 2. Даны два отрезка a и b . Постройте отрезок:

а) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; б) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$; в) $x = \sqrt{ab}$.

Решение. Первые два построения основаны на теореме Пифагора.

а) x — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b (рис. 215).

б) x — катет прямоугольного треугольника, у которого другой катет равен b , а гипотенуза равна a (рис. 216).

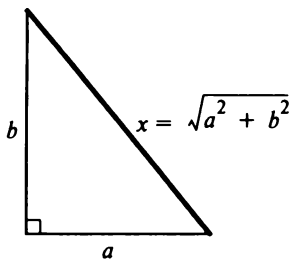


Рис. 215

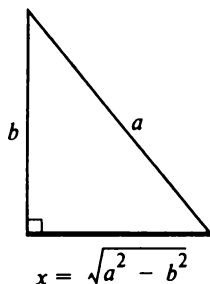


Рис. 216

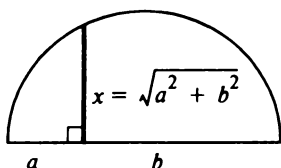


Рис. 217

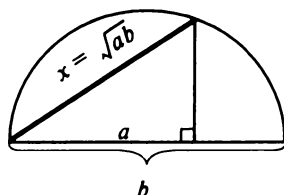


Рис. 218

в) Здесь можно предложить построение, основанное на соотношении между высотой прямоугольного треугольника и отрезками гипотенузы: если a и b — отрезки гипотенузы, на которые она делится высотой, то высота как раз и равна \sqrt{ab} (рис. 217). Теперь построение понятно. Строим отрезок $a + b$. Затем на этом отрезке, как на диаметре, строим полуокружность, и из точки, разделяющей отрезки a и b , проводим перпендикуляр к диаметру до пересечения с полуокружностью. Получившийся отрезок этого перпендикуляра и будет искомым, поскольку, как мы знаем, угол, опирающийся на диаметр, является прямым.

Можно было бы исходить и из других соотношений в прямоугольном треугольнике (рис. 218).

В связи с последним построением сделаем одно замечание. Величина $\frac{a+b}{2}$ называется **средним арифметическим** a и b , а величина \sqrt{ab} — **средним геометрическим**. Из нашего построения (см. рис. 217) следует известное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Оно следует из того, что любая хорда окружности не превосходит ее диаметра. ▼

Рассмотрим одну задачу, чтобы показать, как эти элементарные построения позволяют делать более сложные построения.

* Одна нестандартная задача

Задача 3. Даны отрезки a и b . Постройте отрезок, задаваемый формулой¹, $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение: $a^4 + b^4 = a^2 \left(a^2 + \frac{b^4}{a^2} \right)$. Построим сначала вспомогательный отрезок $y = \frac{b^2}{a}$.

¹ $\sqrt[4]{m}$ можно определить равенством $\sqrt[4]{m} = \sqrt{\sqrt{m}}$.

Здесь можно воспользоваться методом, предложенным в задаче 1 к § 8.3.

Теперь получается, что $a^4 + b^4 = a^2(a^2 + y^2)$. Построим еще один вспомогательный отрезок $z = \sqrt{a^2 + y^2}$. В результате имеем $x = \sqrt[4]{a^2 z^2} = \sqrt{az}$. Поскольку a и z — известные отрезки, задача сведена уже к рассмотренной (задача 2, в § 8.3). ▼

Две следующих задачи на построение служат иллюстрацией метода подобия.

* Две задачи на метод подобия

Задача 4. Постройте треугольник по двум углам и сумме радиусов вписанной и описанной окружностей.

Решение. Дело в том, что два первых условия — два угла треугольника — определяют треугольник, как говорят математики, с точностью до подобия. Любой треугольник, два угла которого равны данным, подобен искомому.

Итак, построим любой треугольник $A_0B_0C_0$, имеющий нужные углы (рис. 219). Сторону A_0B_0 можно выбрать произвольно.

В этом треугольнике построим центры вписанной и описанной окружности (это вы уже умеете делать), найдем их радиусы R_0 и r_0 , а затем и сумму $R_0 + r_0$.

Проведем через A_0 произвольный луч, отложим на нем от A_0 отрезок $R_0 + r_0$ и данный отрезок $R + r$. Получим точки M_0 и M . Соединим M_0 и B_0 и через M проведем прямую, параллельную M_0B_0 . Эта прямая определит на A_0B_0 точку B . Затем найдем точку C на A_0C_0 ($BC \parallel B_0C_0$).

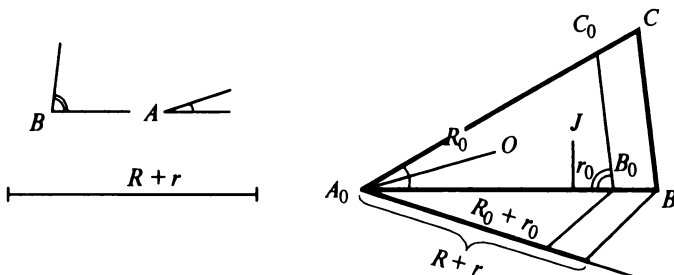


Рис. 219

Треугольник A_0BC будет искомым. Он подобен треугольнику $A_0B_0C_0$ с коэффициентом $\frac{R+r}{R_0+r_0}$. Это означает, что сумма радиусов вписанной и описанной окружностей у него равна $R+r$. ▼

Задача 5. Дан треугольник ABC . Постройте квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC и по одной — на сторонах AB и BC .

Решение. Возьмем любую точку M_0 на AB и построим квадрат $M_0K_0P_0L_0$, у которого точки P_0 и L_0 лежат на AC (рис. 220). Проведем прямую AK_0 и найдем на BC точку K , являющуюся одной из вершин искомого квадрата $MKPL$. ▼

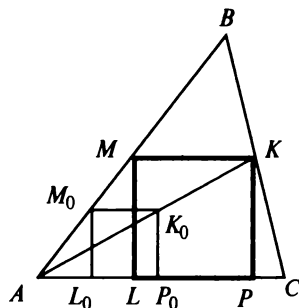


Рис. 220

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

1(в). Дан отрезок длины 1. Постройте отрезок длины $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$. Укажите способ построения отрезка длиной \sqrt{n} .

2(вп). Даны отрезки a, b, c, d и e . Постройте отрезок x , если:

а) $x = \sqrt{a^2 + 2b^2}$; б) $x = \sqrt{2ab}$; в) $x = \sqrt[4]{abcd}$;

г) $x = \frac{abc}{de}$; д) $x = \frac{a^5}{b^4}$; е) $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$.

3. Постройте прямоугольный треугольник по катету и проекции другого катета на гипотенузу.

4(п). Постройте треугольник по двум углам и сумме медиан.

5(п). Постройте треугольник по углу, отношению сторон, заключающих этот угол, и радиусу вписанной окружности.

6(п). Дан угол и точка внутри него. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через данную точку.

7(п). Дана прямая и две точки по одну сторону от нее. Постройте окружность, проходящую через данные точки и касающуюся данной прямой.

8(т). Постройте треугольник по углам, которые одна из медиан образует со сторонами, которые ее заключают, и другой медиане.

9(т). Докажите, что если d — любой отрезок, h_a, h_b, h_c — три высоты некоторого треугольника, то треугольник со сторонами $\frac{d^2}{h_a}, \frac{d^2}{h_b}, \frac{d^2}{h_c}$ подобен данному треугольнику. Используя этот факт, постройте треугольник по трем высотам.

10(т). На плоскости изображена дуга AB окружности и указан ее центр. Только с помощью циркуля разделите дугу AB пополам.

* 8.4. Одно важное геометрическое место точек

Свойство прямой, перпендикулярной данному отрезку

Рассмотрим задачу на геометрические места точек.

Факт, который утверждается в этой задаче, бывает весьма полезен при решении некоторых достаточно интересных и трудных задач, доказательстве теорем.

Задача. Докажите, что геометрическим местом точек M таких, что $AM^2 - BM^2$ есть величина постоянная, где A и B — данные точки плоскости, является прямая, перпендикулярная AB .

Решение. Пусть M — любая точка нашего геометрического места. Опустим из M перпендикуляр на AB (рис. 221). Получим точку D . По теореме Пифагора $AM^2 - AD^2 = MD^2 = MB^2 - BD^2$, откуда $AM^2 - BM^2 = AD^2 - BD^2$. Но $AM^2 - BM^2$ — величина постоянная. Из этого следует, что и точка D одна и та же для всех точек M из нашего геометрического места.

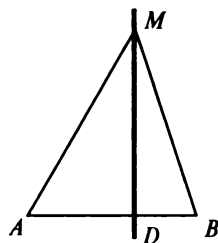


Рис. 221

В самом деле, пусть $AM^2 - BM^2 = k$, $AB = a$, $AD = x$. (Будем считать, что $k > 0$.) Имеем уравнение $x^2 - (a - x)^2 = k$, решая которое находим $x = \frac{k + a^2}{2a}$.

Итак, все точки нашего геометрического места лежат на одном перпендикуляре к AB , проходящем через найденную точку D . Понятно, что все точки этого перпендикуляра принадлежат нашему геометрическому месту точек. Ведь для всех таких точек M выполняется равенство $AM^2 - BM^2 = AD^2 - BD^2 = k$. ▼

Условие перпендикулярности двух прямых

Только что решенная задача дает удобное условие перпендикулярности двух прямых.

Если прямые AB и KM перпендикулярны, то

$$AK^2 - BK^2 = AM^2 - BM^2.$$

И обратно: если $AK^2 - BK^2 = AM^2 - BM^2$, то прямые AB и KM перпендикулярны.

Чтобы не формулировать отдельно два утверждения — прямое и обратное, в математике используется оборот *необходимо и достаточно*. В данном случае условие будет формулироваться так:

для того чтобы прямые AB и KM были перпендикулярными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$AK^2 - BK^2 = AM^2 - BM^2.$$

Это равенство можно записать в виде

$$AK^2 + BM^2 = AM^2 + BK^2.$$

Или, в словесной формулировке:

для того чтобы диагонали четырехугольника были перпендикулярными, необходимо и достаточно, чтобы суммы квадратов его противоположных сторон были равны (рис. 222).

Используя это условие, приведем еще одно, третье, доказательство теоремы о высотах треугольника.

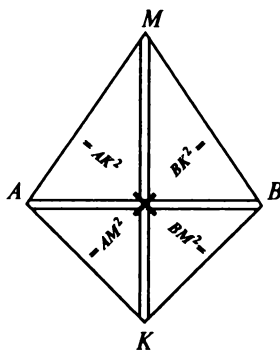


Рис. 222

Теорема о высотах, третье доказательство

Теорема 8.4.

Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC . Пусть высоты, выходящие из вершин A и B , пересекаются в точке H (рис. 223).

Прямые AH и BH перпендикулярны соответственно BC и AC , поэтому согласно условию

$$AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2, \quad BA^2 - BC^2 = HA^2 - HC^2.$$

Вычитая эти равенства одно из другого, получим

$$CB^2 - CA^2 = HB^2 - HA^2,$$

т. е. HC и AB перпендикулярны. Теорема доказана (в третий раз!). ▼

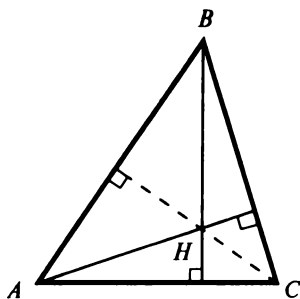


Рис. 223

* Задачи, задания, вопросы

- 1(в). Сформулируйте необходимое и достаточное условие равенства треугольника.
- 2(в). Сформулируйте прямое и обратное утверждение теоремы Пифагора в виде одной теоремы.
3. Приведите примеры необходимых и достаточных условий, известные вам из курса геометрии.
- 4(п). Три стороны четырехугольника в порядке обхода равны 7, 1, 4. Найдите четвертую сторону этого четырехугольника, если известно, что его диагонали перпендикулярны.
5. Рассмотрим два различных четырехугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если у одного из них диагонали перпендикулярны, то и у другого они также перпендикулярны.
- 6(т). В четырехугольнике $ABCD$ известны стороны $AB = 12$, $BC = 9$, $CD = 1$, $DA = 8$. Вершины A и B остаются неподвижными, а C и D перемещаются так, что длины сторон этого четырехугольника не меняются. Какую линию описывает при этом точка пересечения диагоналей четырехугольника?
- 7(т). Даны две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R и r . Докажите, что геометрическим местом точек M , для которых касательные к данным окружностям равны, является

прямая, перпендикулярная O_1O_2 , или часть такой прямой. В каких случаях геометрическим местом является вся прямая?

8. Даны две окружности с радиусами 7 и 1. Расстояние между их центрами равно 2. На прямой, проходящей через центры окружностей, взята точка M такая, что касательные, проведенные из M к окружностям, равны между собой. Чему равны эти касательные?

9(т). Даны три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что три прямые, каждая из которых проходит через две точки пересечения двух окружностей, пересекаются в одной точке.

10(т). Дана окружность и точка A . Рассмотрим произвольную окружность, проходящую через A и пересекающую данную в точках B и C . Прямая BC и касательная к построенной окружности в точке A пересекаются в точке M . Найдите геометрическое место точек M .

11(т). На плоскости заданы две точки A и B . Точка C перемещается по плоскости так, что ABC — треугольник, в котором $AC - BC = a$, где a — заданный отрезок, $a < AB$. Какую линию при этом описывает центр окружности, вписанной в треугольник ABC ?

8.5. Вписанные и описанные четырехугольники

В этом параграфе будут рассмотрены два вида четырехугольников: вписанные и описанные. С такими четырехугольниками вы уже встречались, хотя четкие определения не приводились. Поэтому начнем с определений.

*Четырехугольник называется **вписанным**, если его вершины расположены на одной окружности.*

*Четырехугольник называется **описанным**, если его стороны касаются одной окружности (рис. 224).*

С некоторыми свойствами этих четырехугольников вы познакомились в главе 5. Более того, первая из двух теорем, которые сейчас будут доказаны, известна (теорема 5.9) в несколько иной формулировке.

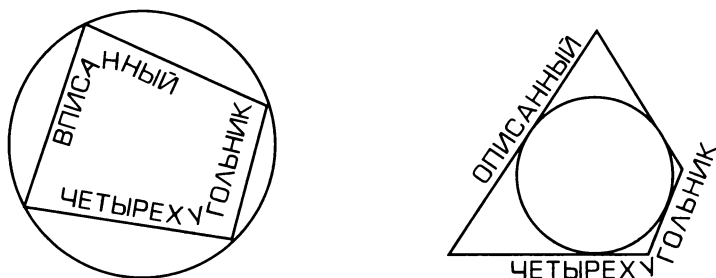


Рис. 224

Вписанный четырехугольник

Теорема 8.5.

Для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был вписанным, необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий:

- а) $ABCD$ — выпуклый четырехугольник и $\angle ABD = \angle ACD$;
- б) сумма двух противоположных углов четырехугольника равна 180° .

а) **Необходимость.** Если $ABCD$ — вписанный четырехугольник (рис. 225), то он непременно выпуклый и углы ABD и ACD равны, поскольку опираются на одну дугу.

Достаточность. Так как $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, то точки B и C расположены по одну сторону от прямой AD .

Опишем около треугольника ABD окружность (рис. 226). Точка C не может располагаться вне этой окружности, так как в этом случае угол ACD , как угол с вершиной вне круга, измерялся бы полуразностью дуги AD и еще какой-то дуги, т. е. был бы меньше угла ABD .

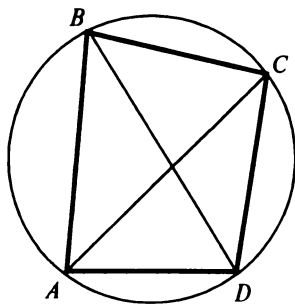


Рис. 225

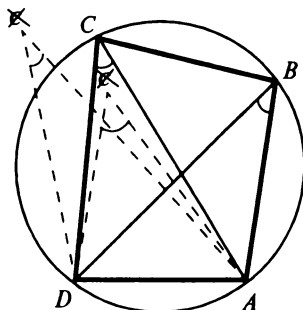


Рис. 226

Точно так же C не может находиться внутри круга, так как в этом случае угол ACD был бы больше угла ABD .

Значит, точка C лежит на окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, и этот четырехугольник является вписанным.

б) Необходимость следует из свойств вписанных углов.

Достаточность. Из условия следует, что все углы четырехугольника меньше 180° , т. е. он выпуклый. Далее рассуждаем так же, как и в пункте а). Рассмотрим два противоположных угла B и D . Их сумма равна 180° . Опишем около треугольника ABC окружность (рис. 227). Точка D расположена по другую сторону от AC , чем B . Но для всех точек дуги AC , не содержащей B , вписанные углы дополняют до 180° угол B . Значит, D не может быть ни вне (тогда угол ADC был бы меньше, чем $180^\circ - \angle B$), ни внутри круга (тогда он был бы больше $180^\circ - \angle B$). Таким образом, точка D лежит на окружности, описанной около треугольника ABC , и четырехугольник $ABCD$ — вписанный. ▼

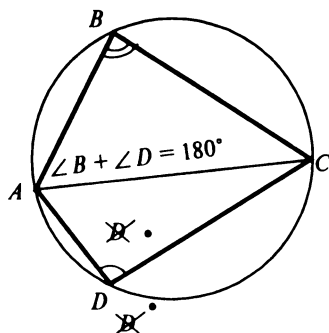


Рис. 227

Описанный четырехугольник

Теорема 8.6.

Для того чтобы выпуклый четырехугольник $ABCD$ являлся описанным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $AB + DC = BC + AD$. (Суммы противоположных сторон равны.)

Доказательство. Необходимость. Эта часть теоремы вам знакома. Итак, четырехугольник $ABCD$ является описанным. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AB , BC , CD и DA соответственно через K , P , M и H (рис. 228). Мы знаем, что касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны.

Пусть $AK = AH = a$, $BK = BP = b$, $CP = CM = c$, $DM = DH = d$. Тогда $AB = a + b$, $BC = b + c$, $CD = c + d$, $DA = d + a$, а значит, $AB + CD = a + b + c + d$, $BC + DA = b + c + d + a$, т. е. $AB + CD = BC + DA$.

Достаточность. Нам надо доказать, что если для выпуклого четырехугольника выполняется условие теоремы (равны суммы противоположных сторон), то он является описанным.

Приведем два доказательства этого утверждения.

Первое доказательство. Воспользуемся методом от противного. Пусть для четырехугольника $ABCD$ выполняется условие $AB + CD = BC + DA$ (рис. 229). Проведем биссектрисы углов A и B и обозначим через O точку их пересечения.

Точка O равноудалена от сторон AD и AB , а также от сторон BA и BC . Значит, точка O равноудалена от трех сторон AB , AD и BC , поэтому мы можем построить окружность с центром в O , касающуюся этих трех сторон четырехугольника $ABCD$. Пусть эта окружность не касается стороны CD . Для определенности можно считать, что она не пересекает стороны CD .

Проведем через C прямую, касающуюся этой окружности, и обозначим через D_1 ее точку пересечения с AD . Имеем два четырехугольника $ABCD$ и $ABCD_1$, в каждом из которых суммы противоположных сторон равны. В первом — по условию теоремы, во втором — потому, что он описанный. Запишем оба эти равенства:

$$AB + CD = BC + AD, \quad AB + CD_1 = BC + AD_1.$$

Вычтем второе равенство из первого. Получим: $CD - CD_1 = DD_1$ или $CD = CD_1 + DD_1$. Последнее равенство означает, что точки C , D и D_1 лежат на одной прямой, так как в противном случае оно противоречило бы неравенству треугольника. Значит, точки D и D_1 совпадают, и четырехугольник $ABCD$ является описанным.

Замечание. В геометрии (и не только в геометрии) очень важно уметь видеть различные варианты, которые могут быть в той или иной ситуации. В данном случае возникает вопрос: а что будет, если построенная окружность выйдет за границы четырехугольника, т. е. пересечет сторону CD ? Не может ли получиться так, что касатель-

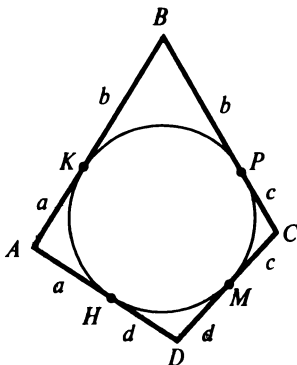


Рис. 228

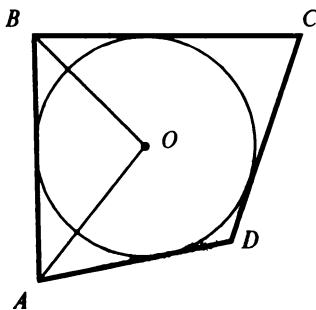


Рис. 229

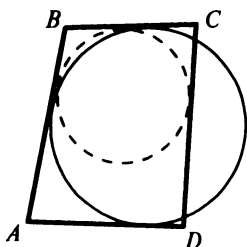


Рис. 230

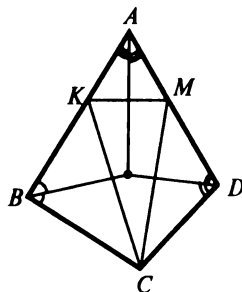


Рис. 231

ная к окружности, проведенная через C , либо окажется параллельной AD , либо пересечет прямую AD с другой стороны от точки A ?

Покажем, что для любого выпуклого четырехугольника найдется окружность, касающаяся трех его сторон и целиком расположенная внутри него. В самом деле, если окружность касается AB , BC и AD и пересекает CD (рис. 230), то окружность, касающаяся AB , BC и CD , имеет меньший радиус и целиком лежит внутри четырехугольника $ABCD$.

Второе доказательство. Докажем, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ имеет место равенство $AB + CD = BC + AD$ (рис. 231), то найдется точка, равноудаленная от всех сторон этого четырехугольника.

Для этого достаточно установить, что биссектрисы трех его углов, например углов A , B и D , пересекаются в одной точке. (Тогда точка пересечения соответствующих биссектрис равноудалена от AB и AD , BA и BC , AD и DC , т. е. равноудалена от всех четырех сторон.)

Пусть для определенности $AB > BC$. Из условия $AB + CD = BC + AD$ следует, что $AB - BC = AD - CD$. Возьмем на AB точку K так, что $BK = BC$, $AK = AB - BC$, а на AD — точку M такую, что $MD = CD$, $AM = AD - CD$. Как видим, $AK = AM$.

Поскольку треугольники MAK , KBC и CDM — равнобедренные с основаниями MK , KC и CM , биссектрисы углов A , B и D являются серединными перпендикулярами к отрезкам MK , KC и CM . Это означает, что они пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника MKC . ▼

Докажем теорему, усиливающую утверждение теоремы 8.6.

* Теорема 8.7.

Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ нет параллельных сторон. Обозначим через E и F точки пересечения прямых

AB и DC , BC и AD соответственно. Будем считать, что точка A лежит на отрезке BE , а точка C — на отрезке BF .

Для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был описанным, необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий:

- а) $AB + CD = AD + BC$;
- б) $ED + BF = DF + BE$;
- в) $EA + AF = EC + CF$.

Доказательство. Как видим, теорема 8.6 составляет пункт а) теоремы 8.7. (Для этого пункта требование отсутствия параллельных сторон не нужно.)

Рассуждения во всех пунктах одинаковы. Пункт а) мы умеем доказывать, поэтому ограничимся **доказательством пункта в)**.

Необходимость. Пусть касательные к окружности из точек A, B, C, D, E и F соответственно равны a, b, c, d, e и f (рис. 232). Тогда $EA = e - a$, $AF = a + f$, $EC = e + c$, $CF = f - c$. Значит,

$$EA + AF = (e - a) + (a + f) = e + f,$$

$$EC + CF = (e + c) + (f - c) = e + f,$$

$$EA + AF = EC + CF.$$

Достаточность. Пусть выполняется равенство $EA + AF = EC + CF$. Докажем, что биссектрисы углов BAD, BCD и BEC пересекаются в одной точке. Из этого будет следовать, что $ABCD$ — описанный четырехугольник. (Точка пересечения этих биссектрис будет равноудалена от AB и AD , BC и CD , а также от AB и CD .)

Возьмем на луче EA за точкой A точку T так, что $AT = AF$, а на луче EC за точкой C точку S так, что $CS = CF$ (рис. 233). Поскольку $ET = EA + AF$, а $ES = EC + CF$, из условия теоремы следует, что $ET = ES$.

Рассмотрим треугольник TFS . Серединный перпендикуляр к стороне TS этого треугольника является биссектрисой угла TES (или угла BEC). Это следует из равнобедренности треугольника TES .

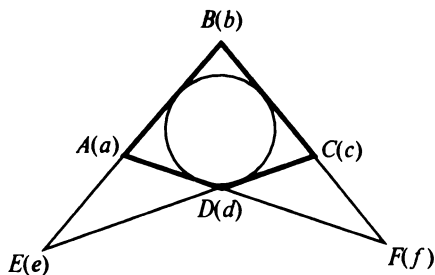


Рис. 232

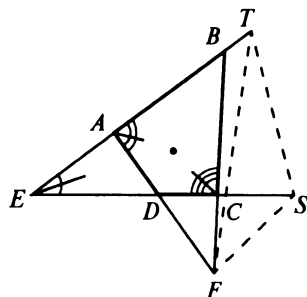


Рис. 233

Точно так же из равнобедренности треугольника TAF будет следовать, что серединный перпендикуляр к TF является биссектрисой угла TAF (или BAD), а из равнобедренности треугольника SCF получим, что серединный перпендикуляр к SF является биссектрисой угла SCF (или BCD).

Таким образом, указанные биссектрисы пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника TFS .

Тем самым пункт в) доказан полностью. Попробуйте самостоятельно доказать пункт б). ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

1. Приведите пример четырехугольника $ABCD$, для которого имеет место равенство $\angle ABD = \angle ACD$, но который не является вписанным.
2. Докажите, что если четырехугольник можно разрезать на два вписанных четырехугольника, то этот четырехугольник либо трапеция, либо параллелограмм.
- 3(в). В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 , H — точка их пересечения. Перечислите все вписанные четырехугольники с вершинами в точках A , B , C , A_1 , B_1 , C_1 , H .
4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 . Докажите, что если четырехугольник AB_1A_1B является вписанным, то ABC — равнобедренный треугольник.
- 5(п). Пусть O — центр описанной около ABC окружности, J — центр вписанной окружности. Докажите, что если точки A , B , O и J лежат на одной окружности, то угол C равен 60° .
- 6(п). Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC , J — центр вписанной в него окружности. Известно, что точки A , B , H и J лежат на одной окружности. Найдите угол C треугольника.
7. Имеются два выпуклых четырехугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если один из них является описанным, то и другой также является описанным.
- 8(т). Треугольники ABC и AB_1C имеют равные периметры, точки B и B_1 расположены по одну сторону от AC . Обозначим

через D точку пересечения прямых AB и CB_1 , а через E — точку пересечения прямых AB_1 и CB . Докажите, что $EB + B_1D = EB_1 + BD$ (точки D и E расположены по ту же сторону от AC , что и B).

- 9(п). На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 . Докажите, что окружности, описанные около треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 и A_1B_1C , пересекаются в одной точке. (Эта точка называется *точкой Микеля*.)
- 10(т). В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M . Известно, что $AB = a$, $CD = b$, $\angle AMB = \alpha$. Найдите радиус окружности.
11. Стороны параллелограмма равны 2 и 3. Прямая, пересекающая две большие стороны параллелограмма и перпендикулярная им, делит этот параллелограмм на два четырехугольника, в каждый из которых можно вписать окружность. Найдите острый угол этого параллелограмма.
12. В треугольник ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 10$ вписана окружность. Прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и K , касается этой окружности. Чему равен периметр треугольника MBK ?
- 13(п). Четыре окружности расположены на плоскости таким образом, что каждая касается ровно двух других внешним образом. Докажите, что четыре точки попарного касания этих окружностей лежат на одной окружности.
- 14(т). Окружность, вписанная в треугольник ABC , имеет центр в точке J и касается сторон AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла B пересекает прямую A_1B_1 в точке K . Докажите, что точки A , J , B_1 и K лежат на одной окружности. Чему равен угол AKB ?
- 15(т). В выпуклом четырехугольнике проведены биссектрисы его внутренних углов. Докажите, что точки пересечения пар соседних биссектрис служат вершинами вписанного четырехугольника.
- 16(т). Одна из сторон вписанного четырехугольника является диаметром окружности. Докажите, что проекции сторон, прилежащих к этой стороне, на четвертую сторону (на прямую, задающую четвертую сторону) равны между собой.

* 8.6. Вычислительные методы в геометрии или об одной задаче Архимеда

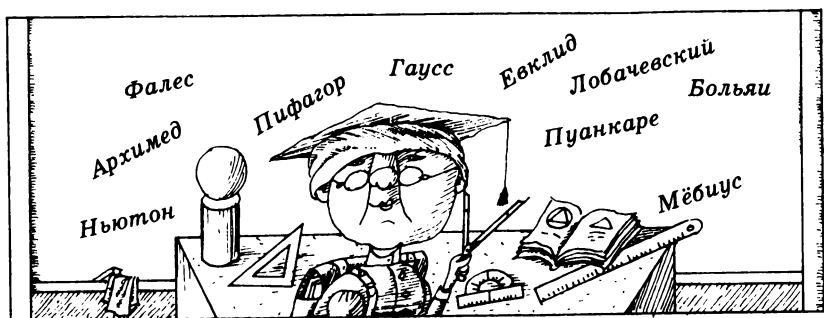
Возможно, на фоне удивительных достижений науки и техники, с которыми вы встречаетесь буквально на каждом шагу, геометрия может показаться каким-то малосовременным, неразвивающимся предметом, не нужным современному человеку, в чью жизнь прочно вошли компьютеры, авиалайнеры, лазеры и многое, многое другое.

Да, в целом человечество за свою долгую жизнь стало намного умнее и совершеннее. А вот стал ли умнее и совершеннее сам человек? Сегодня мы знаем больше своих предков потому, что «стоим на их плечах».

Развитие человечества — это, прежде всего, развитие человеческой мысли. И история геометрии является своего рода зеркалом истории развития человеческой мысли, удивительной сокровищницей, хранящей высшие достижения человеческого гения, жемчужины которой создавались величайшими мыслителями.

Кто не слышал об удивительном ученом Древней Греции Архимеде! Этот великий человек жил в III столетии до н. э. в городе Сиракузы на Сицилии, бывшем в то время греческой колонией. Много прекрасных открытий и изобретений сделал Архимед за свою долгую жизнь. Будучи уже зрелым ученым, в 50 лет, он увлекся геометрией и не расставался с ней до конца своих дней. Говорят, что последними словами Архимеда перед тем, как его убил римский легионер, были: «Осторожно, не наступи на мои круги».

Сегодня школьник восьмого класса владеет средствами, неизвестными Архимеду. И все же давайте рассмотрим одну из его задач. Разберем решение самого Архимеда, подумаем, как бы ее мог решить современный ученик. И сравним эти решения.



Одна задача Архимеда об арбелосе

В своих занятиях геометрией Архимед много внимания уделил изучению свойств фигуры, носящей название *арбелос*, или *скорняжный нож*. Это название фигура получила из-за сходства с очертаниями ножа, использовавшегося скорняками для разделки кож.

Если взять на прямой три последовательные точки A , B и C и построить три полуокружности с диаметрами AB , BC и AC , расположенные по одну сторону от этой прямой, то фигура, ограниченная этими полуокружностями, и является арбелосом (рис. 234).

Из многих свойств этой фигуры, обнаруженных Архимедом, мы рассмотрим только одно.

Задача 1. (Задача Архимеда.) *Проведем в арбелосе через точку B прямую, перпендикулярную AC , и обозначим ее точку пересечения с большей полуокружностью через D . Рассмотрим две окружности, вписанные в два образовавшихся криволинейных треугольника. Первая касается отрезка BD , полуокружности AB и дуги DA . Вторая касается BD , полуокружности BC и дуги DC . Докажите, что эти две вписанные окружности равны.*

Решение Архимеда опиралось на одно простое свойство касающихся окружностей, которое мы назовем *леммой Архимеда*. (*Леммой* в математике называют вспомогательное утверждение, предшествующее основной теореме.)

Лемма Архимеда. *Пусть прямая пересекает данную окружность в точках K и M . Рассмотрим произвольную окружность, касающуюся данной в точке P , а прямой KM в точке L . Тогда прямая PL проходит через середину одной из двух дуг KM , на которые данная окружность разделена прямой KM .*

(Эта лемма предлагалась в виде задачи (см. задачу 13 к § 5.4).)



Рис. 234

Доказательство леммы. Рассмотрим для определенности случай, изображенный на рисунке 235. Пусть O — центр данной окружности, O_1 — центр построенной окружности. Точки O , O_1 и P лежат на одной прямой. Пусть прямая PL пересекает данную окружность в точке E . Треугольники PO_1L и POE равнобедренные. У них есть общий угол — угол при вершине P . Значит, они подобны, и O_1L параллельна OE . Но O_1L перпендикулярна KM . Следовательно, OE также перпендикулярна KM . Значит, E — середина дуги. Лемма доказана.

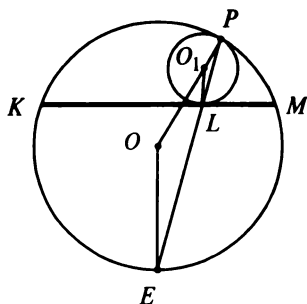


Рис. 235

Приведем еще одно доказательство леммы Архимеда. Рассмотрим прямую, касающуюся обеих окружностей в точке P . Обозначим через Q точку ее пересечения с прямой KM ; E — точка пересечения PL с большей окружностью (рис. 236). Углы PLM и QPL равны, так как $PQ = LQ$ как касательные. Но угол PLM измеряется полусуммой дуг KE и PM , а $\angle QPL = \angle QPE$ и измеряется половиной дуги PME или полусуммой дуг PM и ME . Значит, дуги KE и ME равны.

Другие случаи расположения окружностей рассматриваются аналогично. Заметим, что точки K и M могут слиться, т. е. рассматриваемая прямая может и касаться окружности. В этом случае прямая PL пройдет через точку E такую, что KE — диаметр данной окружности. ▼

Решение Архимеда

Рассмотрим окружность, касающуюся BD в точке L , дуги AD — в точке P и полуокружности AB — в точке F (рис. 237). Согласно лемме, прямая PL проходит через точку C , а прямая FL — через A .

Проведем через L в построенной окружности диаметр LN . Углы NPL и APC — прямые (как опирающиеся на диаметры в соответствующей окружности), поэтому точки P , N и A лежат на одной прямой. Точно так же на одной прямой лежат точки N , F и B . (Прямыми являются углы NFL и AFB .)

Обозначим теперь через G точку пересечения AL с большей полуокружностью. Рассмотрим треугольник ALC . Высотами в нем являются LB , AP и CG . Продолжим их до пересечения в одной точке, которую обозначим через S .

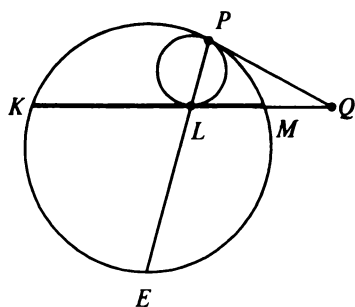


Рис. 236

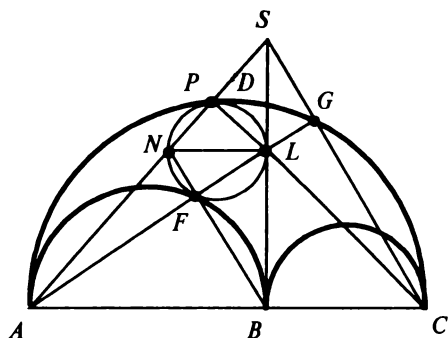


Рис. 237

Из подобия треугольников SNL и SAB получим $\frac{NL}{AB} = \frac{NS}{AS}$. Но прямые NB и SC параллельны, так как они перпендикулярны AL . Значит, $\frac{NS}{AS} = \frac{BC}{AC}$. Итак, имеем $\frac{NL}{AB} = \frac{BC}{AC}$. Откуда следует, что $NL = \frac{AB \cdot BC}{AC}$, при этом NL — диаметр одной из окружностей, вписанных в части арбелоса. Понятно, что находя диаметр второй окружности, мы придем к тому же равенству. ▼

Так доказывал Архимед, а как может или должен решать эту задачу современный хороший ученик?

Вычислительное решение задачи Архимеда

Пусть для краткости и удобства $AB = 2a$, $BC = 2b$, x — радиус окружности, касающейся полуокружности AB , отрезка BD и дуги AD , O — центр этой окружности, O_1 и O_2 — середины AB и AC (рис. 238; O_1 и O_2 — центры соответствующих полуокружностей). В треуголь-

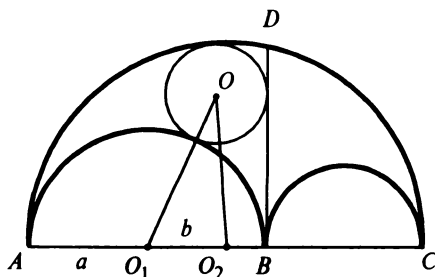


Рис. 238

нике O_1O_2O мы можем выразить все стороны через a , b и x . Получаем: $O_1O = a + x$ (это следует из касания окружностей с центрами O и O_1), $O_2O = a + b - x$ (это следует из касания окружностей с центрами O_2 и O), $O_1O_2 = AO_2 - AO_1 = (a + b) - a = b$.

Нарисуем для удобства отдельно треугольник O_1O_2O и прямую BD (рис. 239). Опустим из O перпендикуляр OT на сторону O_1O_2 . Имеем $TB = x$, $O_2T = |O_2B - TB| = |a - b - x|$, $O_1T = a - x$.

По теореме Пифагора $O_1O^2 - O_1T^2 = OT^2 = O_2O^2 - O_2T^2$. Заменяя все отрезки выражениями через a , b и x , получим уравнение

$$(a + x)^2 - (a - x)^2 = (a + b - x)^2 - (a - b - x)^2,$$

откуда $4ax = 4(a - x)b$, $x = \frac{ab}{a + b}$. ▼

Таким образом, мы получили ту же формулу для радиусов вписанных окружностей, что и Архимед, но используя чисто алгебраический метод. Что лучше, судите сами. На наш взгляд, решение Архимеда — это своего рода искусство, в то время как алгебраическое решение чем-то напоминает «заводскую продукцию».

Основными этапами, причем достаточно стандартными, являются: выделение треугольников с вершинами в центрах рассматриваемых окружностей, выражение длин отрезков через известные и неизвестные величины, составление уравнения или уравнений. Типичным здесь является и то, что для составления уравнения используется теорема Пифагора. Нередко уравнения получают, используя теорему косинусов.

Окружность, вписанная в арбелос

Задача 2. Пусть радиусы двух меньших полуокружностей, образующих арбелос, равны a и b . Найдите радиус окружности, вписанной в арбелос, т. е. радиус окружности, касающейся большей полуокружности внутренним образом и двух меньших — внешним образом.

Решение. Обозначим центры трех полуокружностей, образующих арбелос, через O_1 , O_2 и O_3 (рис. 240), их радиусы соответственно a , b и $a + b$, O — центр искомой окружности, x — ее радиус.

Все отрезки, соединяющие попарно точки O_1 , O_2 , O_3 и O , можно выразить через a , b и x :

$$O_1O_3 = b, O_3O_2 = a, O_1O = a + x, O_2O = b + x, O_3O = a + b - x.$$

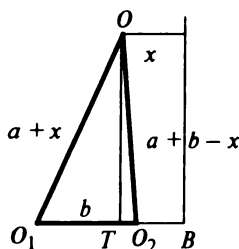


Рис. 239

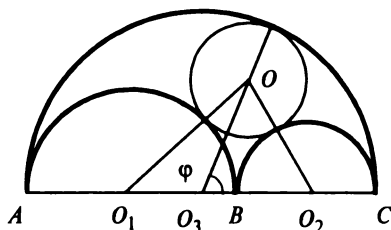


Рис. 240

Обозначим $\angle OO_3O_2 = \varphi$, $\angle OO_3O_1 = 180^\circ - \varphi$. Запишем теорему косинусов для треугольников OO_3O_2 и OO_3O_1 :

$$(b+x)^2 = a^2 + (a+b-x)^2 - 2a(a+b-x) \cos \varphi,$$

$$(a+b)^2 = b^2 + (a+b-x)^2 + 2b(a+b-x) \cos \varphi.$$

Упростим каждое из уравнений:

$$(2b+a)x = a^2 + ab - a(a+b-x) \cos \varphi,$$

$$(2a+b)x = b^2 + ab + b(a+b-x) \cos \varphi.$$

Теперь умножим первое уравнение на b , а второе — на a и сложим их. При этом исключается $\cos \varphi$. Получим

$$2(b^2 + ab + a^2)x = 2(ba^2 + ab^2),$$

$$\text{откуда } x = \frac{(a+b)ab}{a^2 + ab + b^2}. \blacktriangledown$$

* Задачи, задания, вопросы

1. В круге радиуса 1 с центром O проведены радиусы OA и OB . Найдите радиус окружности, касающейся OA , OB и дуги AB , если: а) $\angle AOB = 60^\circ$; б) $\angle AOB = 90^\circ$.
2. В круге радиуса R проведен диаметр, на котором взята точка A на расстоянии a от центра. Найдите радиус окружности, касающейся данной изнутри и диаметра в точке A .
- 3(п). Найдите сторону квадрата, вписанного в полуокруг радиуса R .
- 4(п). Найдите сторону квадрата, вписанного в четверть круга радиуса R так, что две вершины лежат на радиусах и две — на дуге.

5. Докажите, что длина общей касательной к двум меньшим полуокружностям, образующим арбелос, равна отрезку BD (BD — тот же самый отрезок, что и в задаче Архимеда).
- 6(пт). Окружность радиуса r касается изнутри окружности радиуса R . Найдите радиус третьей окружности, которая касается обеих данных и прямой, проходящей через их центры.
- 7(т). Дан полукруг радиуса R , в него вписана окружность радиуса $\frac{R}{2}$. Вторая окружность касается диаметра полукруга, полуокружности, его ограничивающей, и вписанной окружности. Найдите радиус второй окружности.
Построим еще и третью окружность, которая отлична от первой и изнутри касается исходной полуокружности, ее диаметра и внешним образом второй окружности. Найдите радиус третьей окружности.
- 8(т). В окружности единичного радиуса проведена хорда длины 1. Найдите сторону квадрата, две вершины которого лежат на хорде, а две — на окружности.
- 9(т). Два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ расположены в плоскости так, что вершины B, C, K и N лежат на одной прямой, а четыре оставшиеся расположены по разные стороны от BC и лежат на одной окружности. Известно, что сторона одного из квадратов на 1 больше стороны другого. Найдите расстояние от центра окружности до прямой BC .
- 10(т). На прямой находятся точки A, B и C , причем $AB = BC = 3$. Три окружности радиуса R имеют центры в точках A, B и C . Найдите радиус четвертой окружности, касающейся всех трех данных, если: а) $R = 1$; б) $R = 2$; в) $R = 5$.
- 11(т). Три окружности, попарно касающиеся друг друга внешним образом, имеют центры в вершинах прямоугольного треугольника. Эти окружности касаются изнутри четвертой окружности. Найдите радиус четвертой окружности, если периметр прямоугольного треугольника равен $2p$.
- 12(пт). Две окружности с радиусами R и r ($R > r$) касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, касающейся данных и их общей внешней касательной. (Общая внешняя касательная — это касательная, не пересекающая отрезка, соединяющего центры окружностей.)

8.7. Задачи для повторения

.....

1. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно α и β . Окружность с центром в C и радиусом CA вторично пересекает AB в точке K . Окружность с центром в K и радиусом KB вторично пересекает CB в точке M . Найдите углы треугольника CKM , если:
а) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$; б) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 40^\circ$; в) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 100^\circ$.
2. Возможно ли, чтобы одна биссектриса треугольника делила пополам другую биссектрису?
3. Два угла треугольника равны 40° и 80° . Найдите углы треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами данного треугольника.
- 4(т). На окружности, описанной около треугольника ABC , взяты точки K, M, P , отличные от его вершин, так, что $AK = AB$, $BM = BC$, $CP = CA$. Найдите углы треугольника KMP , если углы A и B треугольника ABC соответственно равны:
а) $28^\circ, 58^\circ$; б) $58^\circ, 84^\circ$; в) $84^\circ, 28^\circ$.
- 5(п). В окружности проведен диаметр AB , C — произвольная точка окружности, J — центр вписанной в ABC окружности. Какую линию описывает точка J , когда C пробегает все точки окружности, отличные от A и B ?
- 6(в). Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма диаметров вписанной и описанной окружностей равна сумме катетов.
7. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки, равные 24 и 54. Найдите катеты этого треугольника.
8. Катет прямоугольного треугольника равен 6, проекция этого катета на гипотенузу равна 2. Найдите гипотенузу и другой катет этого треугольника.
9. Катет прямоугольного треугольника равен проекции другого катета на гипотенузу. Найдите синус меньшего угла этого треугольника.
- 10(в). Найдите наименьший острый угол прямоугольного треугольника, если известно, что медиана, выходящая из вершины прямого угла, делит этот угол в отношении $2 : 1$.
11. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Чему равно расстояние от вершины прямого угла до ближайшей точки вписанной в этот треугольник окружности?

12. Один катет прямоугольного треугольника равен 5, а проекция другого катета на гипотенузу равна 2,25. Найдите гипотенузу этого треугольника.
13. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности его катетов. Найдите тангенс большего острого угла этого треугольника.
- 14(т). Разность катетов прямоугольного треугольника в 1,2 раза меньше разности их проекций на гипотенузу. Высота, опущенная на гипотенузу, равна 1. Найдите меньший катет этого треугольника.
15. В окружности радиуса $\sqrt{2}$ проведена хорда AB , равная 2. Пусть M — некоторая точка окружности, отличная от A и B . Чему может быть равен угол AMB ?
- 16(в). Найдите сторону равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса R .
- 17(в). Сторона равностороннего треугольника равна a . Найдите радиус описанной и радиус вписанной окружности.
18. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до его сторон, если стороны треугольника равны 9, 40 и 41.
- 19(п). Найдите радиус наименьшего круга, в котором можно разместить треугольник со сторонами 7, 9 и 12.
- 20(п). В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Найдите AC , если:
 - а) $AA_1 = 4$, $BB_1 = 5$, $BC = 6$;
 - б) $A_1C = 8$, $B_1C = 5$, $BB_1 = 12$.
- 21(в). Выразите сторону равностороннего треугольника и радиус описанной около него окружности через r (радиус вписанной окружности).
22. В треугольнике ABC угол A равен 32° , угол C равен 24° . Окружность с центром в точке B проходит через A , пересекает сторону AC в точке M , сторону BC — в точке K . Чему равен угол KAM ?
23. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 2$, $BC = 4$. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает прямую AC в точке M , а прямую AB — в точке P . Известно, что $AM = 1$. Найдите длину PM .
24. Около треугольника со сторонами 5, 6 и 7 описана окружность. Найдите длину хорды этой окружности, делящей пополам среднюю по длине сторону треугольника и проходящей через противоположную этой стороне вершину.

- 25(т). Пусть M — точка на диаметре AB окружности с центром в O ; C и D — точки окружности, расположенные по одну сторону от AB , причем $\angle CMA = \angle DMB$, $\angle OCM = \alpha$. Чему равен угол ODM ?
- 26(п). Пусть AB — диаметр окружности, C — некоторая точка плоскости. Прямые AC и BC вторично пересекают окружность в точках M и K соответственно. Прямые MB и KA пересекаются в точке P . Чему равен угол между прямыми CP и AB ?
- 27(в). Около окружности описана равнобокая трапеция с основаниями 5 и 3. Найдите радиус окружности.
28. Из точки, расположенной вне окружности, проведены к ней касательная и секущая. Длина касательной равна 6. Секущая отсекает на окружности хорду длиной 5. Найдите длину отрезка секущей, расположенного вне окружности.
29. Окружность радиусом r отсекает на сторонах четырехугольника равные хорды, длина каждой из которых d . Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырехугольник.
- 30(п). Около окружности описана трапеция. Докажите, что концы боковой стороны трапеции и центр окружности являются вершинами прямоугольного треугольника. Докажите также, что произведение отрезков боковой стороны, на которые она разделена точкой касания, равно квадрату радиуса окружности.
- 31(т). К окружности проведены касательные, касающиеся ее в концах диаметра AB . Произвольная касательная к окружности пересекает первую из этих касательных (проходящую через A) в точке K , а вторую — в точке M . Докажите, что произведение $AK \cdot BM$ постоянно.
- 32(т). На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ взяты точки K и M так, что $3AK = 4AM = AB$. Докажите, что прямая KM касается окружности, вписанной в этот квадрат.
- 33(в). В треугольнике ABC угол A равен 60° , $AB = 1$, $BC = a$. Найдите сторону AC .
34. Найдите периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда этой окружности, длина которой равна 2, удалена от ее центра на расстояние, равное 3.
35. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка M делит сторону CD в отношении 1:2, считая от точки C , K — середина AD . Какой из отрезков BK или AM больше?
- 36(п). Углы треугольника ABC удовлетворяют условию $A > B > C$. К какой из вершин ближе всего расположен центр вписанной окружности?

Ответьте на этот же вопрос относительно точки пересечения высот и точки пересечения медиан.

К какой стороне ближе всего расположены: центр описанной окружности, точка пересечения высот, точка пересечения медиан?

- 37(п). В треугольнике ABC угол C равен 60° , радиус описанной окружности равен 2. На прямой AC взята точка D так, что $\angle ADB = 45^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADB .
38. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника ABC делит гипотенузу AB на отрезки, равные 7 и 24. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABD , где D — точка пересечения медиан треугольника ABC .
- 39(в). Докажите, что средняя линия равнобокой трапеции, описанной около окружности, равна ее боковой стороне.
- 40(п). В плоскости даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек C таких, что треугольник ABC остроугольный, причем:
а) угол C — наибольший; б) угол C является средним по величине углом треугольника ABC .
- 41(т). В плоскости даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек C этой плоскости таких, что медиана к стороне BC в треугольнике ABC перпендикулярна стороне AC .
- 42(т). В плоскости даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек C этой плоскости таких, что медиана к стороне AC равна высоте к стороне BC .
- 43(п). В треугольнике ABC известны стороны $AB = \sqrt{17}$, $BC = 4$, $CA = 5$. На стороне BC взята точка D так, что $BD = 1$. Найдите угол ADB и расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ADB и ADC .
44. Основанием равнобедренного треугольника ABC является сторона AC , O и J — соответственно центры описанной и вписанной окружностей. Найдите углы треугольника AOJ , если:
а) $\angle B = 80^\circ$; б) $\angle B = 100^\circ$.
45. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4.
46. В треугольнике ABC углы B и C равны 50° и 70° . Найдите углы треугольника DH_1H_2 , где D — точка на AB , H_1 и H_2 — соответственно точки пересечения высот треугольников ACD и BCD .
- 47(п). Найдите углы треугольника, если известно, что медиана и высота, выходящие из одной вершины B , делят соответствующий угол на три равные части.

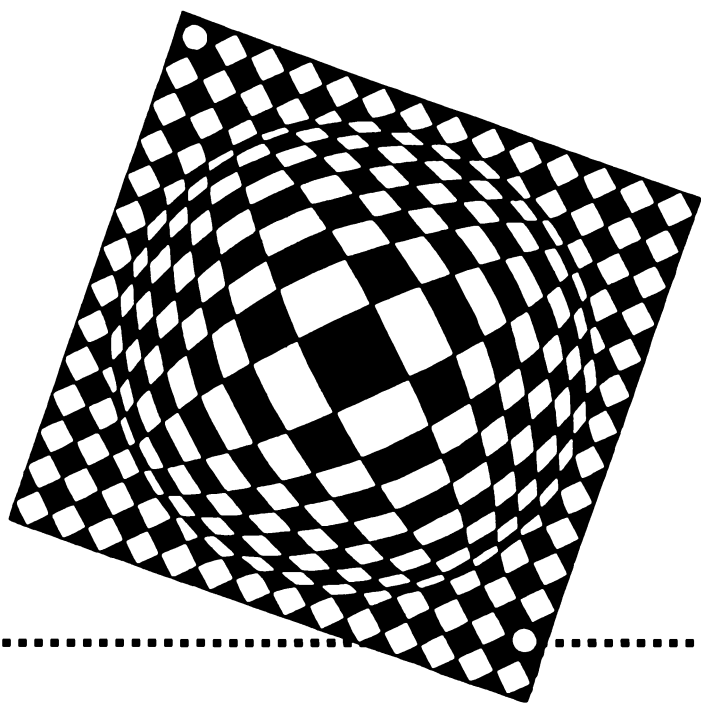
48. На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC взяты точки K и M так, что $BK = KM = MC$. В каком отношении точка K делит гипотенузу AB , если $\cos \angle BAC = \frac{2}{3}$?
49. Сторона ромба $ABCD$ равна 6, $\angle BAD = 60^\circ$. На стороне BC взята точка E так, что $CE = 2$. Найдите расстояние от точки E до центра ромба.
- 50(п). Найдите отношение радиусов двух окружностей, касающихся между собой, если каждая из них касается сторон угла, величина которого равна α .
- 51(т). На одной из сторон угла величины α ($\alpha < 90^\circ$) с вершиной в точке O взяты точки A и B , причем $OA = a$, $OB = b$. Найдите радиус окружности, проходящей через A и B и касающейся другой стороны угла.
- 52(т). В окружность вписана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , у которой острый угол A равен α ; K — точка на окружности такая, что BK параллельна CD , а KD параллельна AC . Найдите $BC:AD$.
- 53(т). Острый угол равнобокой трапеции равен 75° . Прямые, проходящие через концы одного основания трапеции параллельно противоположным боковым сторонам, пересекаются на окружности, описанной около трапеции. Найдите отношение оснований трапеции.
- 54(п). В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена окружность с центром на AC , проходящая через A и касающаяся BC в точке M . Найдите угол BAM .
- 55(т). В треугольнике ABC сторона BC равна 4, а медиана к этой стороне равна 3. Найдите длину общей хорды двух окружностей, каждая из которых проходит через точку A и касается BC , причем одна касается BC в точке B , а другая — в точке C .
- 56(п). Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника и середины его диагоналей, пересекаются в одной точке.
- 57(т). Около окружности описана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC ; M и K — точки касания окружности с AB и CD , P — точка касания с AD . В каком отношении отрезок MK делится отрезком BP ?
58. На прямой расположены точки A, B, C и D так, что $AB = BC = CD$. Отрезки AB, BC, CD служат диаметрами окружностей. Из точки A к окружности с диаметром CD проведена касательная l . Найдите

отношение хорд, отсекаемых на прямой l окружностями с диаметрами AB и BC .

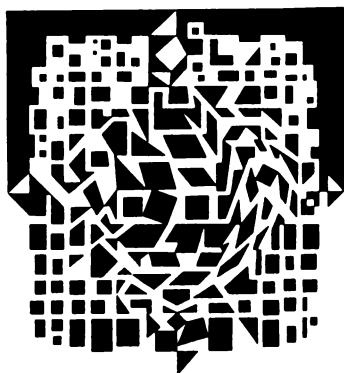
- 59(т). В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD угла C . На прямой AC взята точка E так, что $\angle EDC = 90^\circ$. Найдите EC , если $AD = 1$.
- 60(п). Сторона квадрата является гипотенузой прямоугольного треугольника, расположенного вне квадрата. Докажите, что биссектриса прямого угла этого треугольника проходит через центр квадрата.
- 61(п). Вершины острых углов некоторого прямоугольного треугольника, лежащего внутри прямого угла, движутся по сторонам этого угла. Какую линию описывает вершина прямого угла этого треугольника?
62. Вершина угла, равного 70° , служит началом луча, который образует с его сторонами углы 30° и 40° . Из некоторой точки M плоскости на этот луч и стороны угла опущены перпендикуляры, основания которых A , B и C . Найдите углы треугольника ABC .
- 63(т). Через вершину C равностороннего треугольника ABC проведена произвольная прямая, K и M — проекции A и B на эту прямую, P — середина AB . Докажите, что треугольник KMP — равносторонний.
- 64(т). Сторона AD вписанного четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной окружности, M — точка пересечения его диагоналей, P — проекция M на AD . Докажите, что M — центр окружности, вписанной в треугольник BCP .
- 65(т). Внутри угла с вершиной O взята некоторая точка M . Луч OM образует со сторонами угла углы, один из которых больше другого на 10° ; A и B — проекции M на стороны угла. Найдите угол между прямыми AB и OM .
- 66(т). В треугольнике ABC проведены медиана AA_0 и биссектриса AA_1 . Прямая, параллельная CA и проходящая через A_1 , пересекает AA_0 в точке K . Докажите, что прямые CK и AA_1 перпендикулярны.
- 67(пт). Пусть M — некоторая точка, расположенная на окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC . Докажите, что из трех отрезков MA , MB , MC один равен сумме двух других.
- 68(п). В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CD . На отрезках CD и DA взяты точки E и F так, что $\frac{CE}{CD} = \frac{AF}{AD}$. Докажите, что прямые BE и CF перпендикулярны.

- 69(т). В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота BD ; M — проекция D на сторону AB ; K — середина DM . Докажите, что прямые BK и CM перпендикулярны.
- 70(т). В круге проведены две перпендикулярные хорды AC и BD , пересекающиеся в точке M . Докажите, что прямая, проходящая через M перпендикулярно AB , делит CD пополам.
- 71(т). Пусть B и C — две точки на сторонах угла с вершиной A . Окружности с диаметрами AB и AC вторично пересекаются в точке D . Прямая AB вторично пересекает окружность с диаметром AC в точке K , а прямая AC вторично пересекает окружность с диаметром AB в точке M . Докажите, что прямые BM , CK и AD пересекаются в одной точке.
- 72(п). Пусть M — произвольная точка плоскости треугольника ABC , точки M_1 , M_2 , M_3 симметричны M относительно середин BC , CA , AB соответственно. Докажите, что прямые AM_1 , BM_2 и CM_3 пересекаются в одной точке.
- 73(т). Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M такая, что $\angle MAB = 30^\circ$, $\angle MCB = 15^\circ$. Найдите угол MDA .
- 74(т). Гипотенуза прямоугольного треугольника служит стороной квадрата, расположенного вне треугольника. Найдите расстояние между вершиной прямого угла треугольника и центром квадрата, если сумма катетов треугольника равна d .
- 75(т). На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 так, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке M . Рассмотрим три четырехугольника MA_1BC_1 , MB_1CA_1 и MC_1AB_1 . Докажите, что если:
- а) два из этих четырехугольников являются вписанными, то и третий также является вписанным;
 - б) два из этих четырехугольников являются описанными, то и третий также является описанным.

Девятый класс



Площади многоугольников



В этой главе мы познакомимся с понятием площади. Впрочем, слово «познакомимся» здесь совсем не подходит. В обычной жизни мы на каждом шагу встречаемся с площадями. Площадь — это и квадратные метры наших квартир, гектары полей, квадратные километры лесов и т. д.

Что такое площадь, знает каждый. А действительно ли это так? Подумайте и постарайтесь самостоятельно ответить на вопрос: что такое площадь? И вы увидите, что не так-то это просто. Даже математики смогли создать соответствующую математическую теорию сравнительно недавно. Правда, это никому не мешало успешно использовать понятие площади и в науке, и на практике уже с незапамятных времен.

Изучению понятия площади, выводу формул, с помощью которых можно вычислять площади важнейших геометрических фигур, и, в первую очередь, многоугольников, посвящена эта глава.

9.1. Основные свойства площади.

Площадь прямоугольника

Давайте все же постараемся, исходя из обычного здравого смысла, ответить на вопросы, что такое площадь и каковы ее свойства.

Итак, что такое площадь?

Прежде всего заметим, что площадь — это некоторая характеристика геометрической фигуры, расположенной на плоскости или на иной поверхности. Мы пока будем рассматривать лишь плоские фигуры. Поэтому поставим вопрос несколько иначе: что такое площадь плоской фигуры? Что это за характеристика — площадь плоской фигуры?

Площадь — это число, которое ставится в соответствие ограниченной плоской фигуре.

Теперь попытаемся установить свойства этого числа, выяснить, как его можно найти. Вполне очевидными выглядят следующие свойства площади.

Свойство 1. *Площадь фигуры является неотрицательным числом.*

Свойство 2. *Площади равных фигур равны.*

Свойство 3. *Если фигура разделена на две части, то площадь всей фигуры равна сумме площадей образовавшихся частей.*

Еще нужна фигура, которую мы примем за эталон для измерения площади, — *единицу площади*. При этом не следует забывать, что уже имеется единица измерения длины.

Свойство 4. *За единицу измерения площади принимается площадь квадрата со стороной, равной 1 единице длины (рис. 241).*

СВОЙСТВА ПЛОЩАДИ

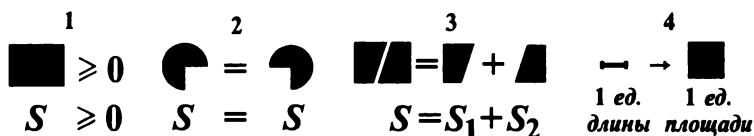


Рис. 241

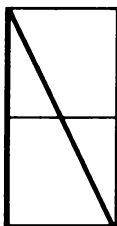


Рис. 242

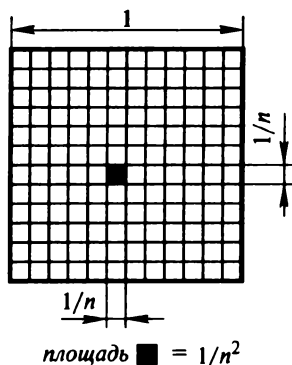


Рис. 243

Другими словами, площадь квадрата со стороной, равной 1 единице длины, равна 1 единице площади, или 1 квадратной единице. Например, площадь квадрата со стороной 1 метр равна одному квадратному метру (1 м^2).

Конечно, единичный квадрат не является единственной фигурой с площадью 1. Из свойств площади следует, что площадь 1 имеет и прямоугольный треугольник, изображенный на рисунке 242.

Фигуры, имеющие равные площади, называются равновеликими.

Два следствия из свойств площади

Перечисленные свойства площади определяют величину площади геометрической фигуры.

Следствие 1.

Если одна фигура содержит внутри себя другую фигуру, то площадь первой фигуры не меньше площади второй фигуры.

Справедливость этого утверждения следует из неотрицательности площади и свойства 2.

Следствие 2.

Площадь квадрата со стороной, длина которой $\frac{1}{n}$ (ед. дл.), равна $\frac{1}{n^2}$ (кв. ед., или ед.²).

Докажем это. Разделим каждую из сторон единичного квадрата на n равных частей и через точки деления проведем прямые, парал-

тельные сторонам квадрата (рис. 243). Весь квадрат окажется разделенным на n^2 равных квадратов. А так как в соответствии со свойством 1 все они имеют равные площади и, согласно свойствам 2 и 3, сумма их площадей равна 1, то площадь каждого из получившихся маленьких квадратов равна $\frac{1}{n^2}$.

Площадь прямоугольника

Теперь мы можем доказать основную теорему.

Теорема 9.1.

Если стороны прямоугольника равны a и b , то его площадь равна произведению ab .

Таким образом, для площади прямоугольника справедливо равенство

$$S = ab,$$

где a и b — длины сторон этого прямоугольника.

Замечание. Здесь a и b — длины сторон прямоугольника, измеренные в **одинаковых** единицах длины. Тогда ab — площадь в соответствующих квадратных единицах.

Доказательство. Утверждение теоремы легко доказывается, если a и b — рациональные числа (т. е. числа вида $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа).

В самом деле, приведем дроби, выражающие длины сторон a и b , к одному знаменателю. Пусть $a = \frac{k}{n}$, $b = \frac{m}{n}$ (рис. 244).

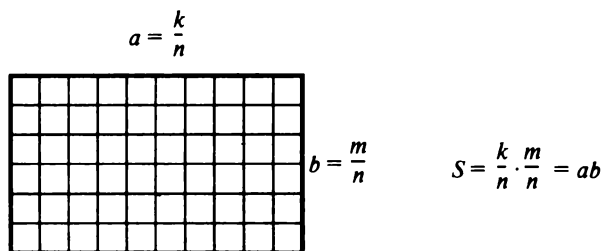


Рис. 244

Разделим теперь сторону a рассматриваемого прямоугольника на k равных частей, а сторону b — на m равных частей. Через точки деления проведем прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Тогда весь прямоугольник окажется разделенным на km квадратов со стороной $\frac{1}{n}$, площади которых, как мы знаем, равны $\frac{1}{n^2}$.

Таким образом, площадь нашего прямоугольника равна

$$S = km \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{n} = ab. \blacktriangledown$$

Труднее приходится при доказательстве формулы площади прямоугольника, если хотя бы одно из чисел a или b не является рациональным. (Напомним, что числа, которые нельзя представить в виде дроби, числитель и знаменатель которой — целые числа, называются *иррациональными*.)

* Для тех, кто не любит ничего принимать на веру (что характерно именно для математиков), приведем доказательство для произвольных a и b .

Возьмем произвольное натуральное число n и подберем натуральные числа k и m такие, что выполняются двойные неравенства $\frac{k}{n} \leq a < \frac{k+1}{n}$, $\frac{m}{n} \leq b < \frac{m+1}{n}$ (рис. 245). Понятно, что такие числа найдутся: мы как бы «шагаем» с шагом $\frac{1}{n}$ до тех пор, пока не «перепрыгнем» через a , а также через b .

Рассмотрим три прямоугольника: первый — со сторонами $\frac{k}{n}$ и $\frac{m}{n}$; второй — данный, со сторонами a и b ; третий — со сторонами $\frac{k+1}{n}$

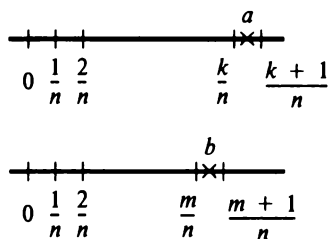


Рис. 245

и $\frac{m+1}{n}$ (рис. 246). Их можно расположить так, что первый прямоугольник не выходит за пределы второго, а третий содержит второй.

Из свойств площади следует, что площадь второго прямоугольника меньше площади третьего и не меньше площади первого.

Площадь первого многоугольника равна $\frac{km}{n^2}$, а площадь третьего составляет $\frac{(k+1)(m+1)}{n^2}$.

Пусть S — площадь второго прямоугольника. Имеем

$$\frac{km}{n^2} \leq S < \frac{(k+1)(m+1)}{n^2}.$$

Но из двойного неравенства $\frac{k}{n} \leq a < \frac{k+1}{n}$ следует, что $an-1 < k \leq an$. Точно так же $bn-1 < m \leq bn$.

Теперь в левой части двойного неравенства для S заменим k и m меньшими величинами, а в правой — большими. Получим

$$\frac{(an-1)(bn-1)}{n^2} < S < \frac{(an+1)(bn+1)}{n^2}.$$

Или, после раскрытия скобок,

$$ab - \frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2} < S < ab + \frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2}$$

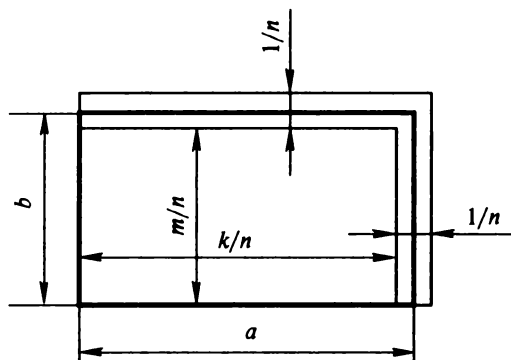


Рис. 246

и тем более

$$ab - \frac{a+b}{n} - \frac{1}{n^2} < S < ab + \frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Вычитая из всех частей неравенства ab , получаем

$$-\left(\frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2}\right) < S - ab < \left(\frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2}\right),$$

т. е.

$$|S - ab| < \frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Посмотрим внимательно на последнее неравенство. Оно верно при любом n . Но в его левой части стоит неотрицательное число, не зависящее от n . Если предположить, что $S \neq ab$, то это число будет положительным. Выбирая теперь n достаточно большим, можно сделать правую часть неравенства меньше любого положительного числа, а значит, меньше левой его части, если $S \neq ab$. Таким образом, непременно $S = ab$, каковы бы ни были числа a и b . ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

1. Как изменится площадь прямоугольника, если каждую из его сторон увеличить в k раз?
2. На плоскости лежат два одинаковых по площади четырехугольника (рис. 247). Докажите, что сумма площадей белых треугольников равна сумме площадей черных треугольников.

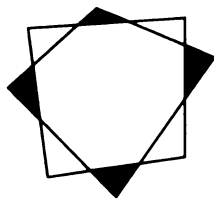


Рис. 247

3. Докажите, что площадь круга радиуса 1 меньше 4 м^2 .
4. На сторонах квадрата во внешнюю сторону построены четыре равных прямоугольных треугольника. Стороны квадрата служат гипотенузами этих треугольников. Найдите площадь фигуры, составленной из квадратов и этих треугольников, если сумма катетов в каждом треугольнике равна d .

5(т). Имеется прямоугольник со сторонами 10 и 12. Предложите способ, с помощью которого этот прямоугольник можно разрезать на части, из которых можно составить равновеликий ему квадрат.

6. Имеется два квадрата 3×3 и 1×1 . Разрежьте их на части, из которых можно составить один квадрат.

7(т). Решите предыдущую задачу для двух произвольных квадратов. Эта задача достаточно трудная, поэтому дадим подсказку в виде рисунка 248.

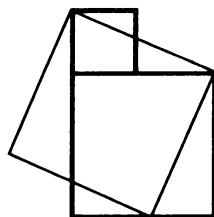


Рис. 248

9.2. Площади треугольника и четырехугольника

В этом параграфе мы сначала получим основные формулы, выражающие площади трех фигур: параллелограмма, треугольника и трапеции, затем выведем еще несколько формул, прежде всего для треугольника, которые могут оказаться полезными при решении различных задач.

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма может быть вычислена по формуле

$$S = ah,$$

где a — длина стороны параллелограмма, h — его высота, опущенная на эту сторону.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором $BC = AD = a$ (рис. 249). Опустим из B и C перпендикуляры BK и CM на AD , $BK = CM = h$. Получившийся прямоугольник $KBCM$ равен параллелограмму $ABCD$. Это следует из равенства треугольников ABK и DCM : чтобы получить из площади $ABCD$ площадь $KBCM$, надо прибавить к ней площадь треугольника DCM , а затем

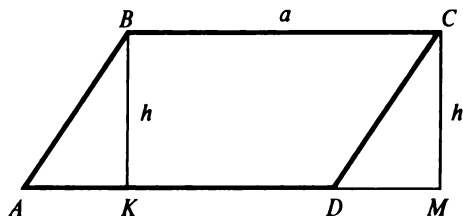


Рис. 249

вычесть площадь треугольника ABK . Это верно при любом расположении K и M на прямой AD . Значит,

$$S = S_{ABCD} = S_{KBCM} = BC \cdot BK = ah. \blacktriangledown$$

Площадь треугольника

Площадь треугольника может быть вычислена по формуле

$$S = \frac{1}{2} ah,$$

где a — сторона треугольника, h — высота, опущенная на эту сторону.

Указанная формула является основной для вычисления площади треугольника.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона BC равна a , а высота, опущенная на нее, равна h .

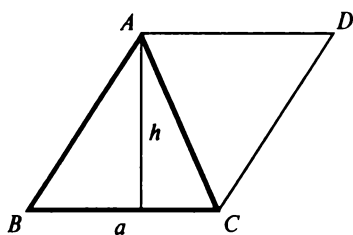


Рис. 250

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$ (рис. 250). Площадь параллелограмма, как мы знаем, равна ah . Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, поскольку треугольники ABC и DCA равны. Значит,

$$S = S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} ah. \blacktriangledown$$

Площадь трапеции

Площадь трапеции может быть вычислена по формуле

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

где a и b — основания трапеции, h — высота трапеции, т. е. расстояние между ее основаниями.

Другими словами, *площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.*

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 251). Диагональ AC делит ее на два треугольника. Имеем

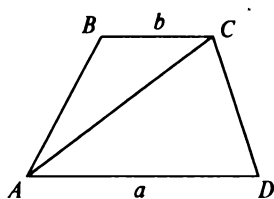


Рис. 251

$$\begin{aligned} S = S_{ABCD} &= S_{ACD} + S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot h + \frac{1}{2} BC \cdot h = \\ &= \frac{1}{2} (a + b) \cdot h. \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

Еще несколько формул для площади треугольника

Будем обозначать через A , B и C величины соответствующих углов треугольника ABC , а через a , b и c , как обычно, длины противолежащих им сторон. Имеем $2p = a + b + c$ — периметр треугольника, r и R — соответственно радиус вписанной и описанной окружности.

В этих обозначениях для площади треугольника справедливы следующие формулы

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C, \quad (1)$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}, \quad (2)$$

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C, \quad (3)$$

$$S = pr. \quad (4)$$

Доказательство.

1. Пусть AD — высота, опущенная на BC (рис. 252). Имеем

$$h = AD = AC \sin C = b \sin C.$$

Значит,

$$S = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

2. По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ откуда } b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

Заменив в формуле (1) b через a , получим

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} a \frac{a \sin B}{\sin A} \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

3. По теореме синусов $a = 2R \sin A$. Заменив в формуле (2) a этим значением, получим

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = (2R \sin A)^2 \frac{\sin B \sin C}{2 \sin A} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

4. Пусть J — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Площадь треугольника ABC составляется из площадей трех треугольников: ABJ , BCJ и CAJ (рис. 253). В каждом из них высоты, опущенные из вершины J , равны r . Значит,

$$S = S_{ABJ} + S_{BCJ} + S_{CAJ} = \frac{1}{2} cr + \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br = \frac{1}{2} (a + b + c)r = pr. \blacktriangledown$$

Обратим внимание, что формула площади $S = pr$ верна для любого описанного многоугольника (p — его полупериметр, r — радиус вписанной окружности).

Доказывается это так же, как и для треугольника.

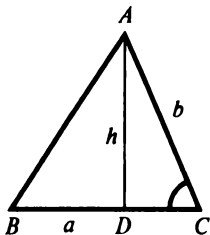


Рис. 252

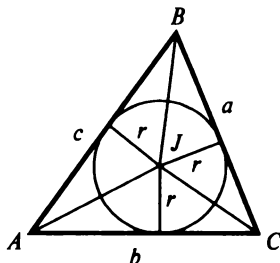


Рис. 253

Площадь произвольного четырехугольника

Для произвольного четырехугольника во многих случаях полезна формула, выражающая его площадь через диагонали и угол между ними.

Пусть m и n — диагонали четырехугольника, φ — угол между ними. Тогда для площади этого четырехугольника справедлива формула

$$S = \frac{1}{2} mn \sin \varphi. \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Имеем $AC = m$, $BD = n$, K — точка пересечения его диагоналей (рис. 254).

Высота треугольника ABC , опущенная на AC , равна $BK \sin \varphi$, а высота треугольника ACD равна $DK \sin \varphi$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} S = S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK \sin \varphi + \frac{1}{2} AC \cdot DK \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{2} AC (BK + DK) \sin \varphi = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \varphi = \frac{1}{2} mn \sin \varphi. \end{aligned}$$

Обратите внимание на то, что указанная формула верна для любого четырехугольника, как выпуклого, так и невыпуклого (рис. 255).

Формула Герона

Приведенные пять формул для площади треугольника не исчерпывают все формулы, с помощью которых можно эту площадь находить. Любые три элемента, задающие треугольник, задают и его

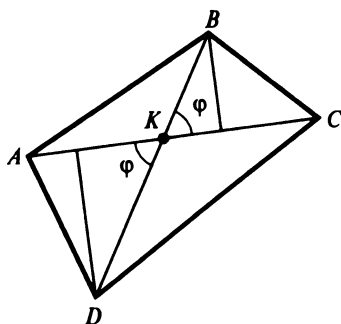


Рис. 254

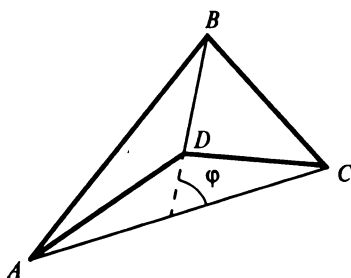


Рис. 255

площадь, а значит, и соответствующую формулу. Правда, большинство подобных формул не представляют ни практического, ни теоретического интереса.

Но на одной формуле, выражающей площадь треугольника через его стороны, нельзя не остановиться. Во-первых, это наиболее естественный и удобный способ задания треугольника (по трем его сторонам). И поэтому формула интересна как в практическом, так и теоретическом отношении.

Во-вторых, несмотря на то, что эта формула достаточно длинная, она является одной из самых красивых и древних формул геометрии. Речь идет о *формуле Герона*, названной так по имени Герона Александрийского — выдающегося древнегреческого математика, жившего в I в. н. э.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Приведем два доказательства этой формулы.

Первое доказательство. Оно, по существу, является чисто алгебраическим и по своей идее совсем несложно. Самое главное — разумно провести необходимые преобразования. Задачу существенно облегчает то, что нам известен результат. А ведь Герон Александрийский получил его, не зная заранее, открыл (!) формулу.

Будем исходить из двух известных соотношений:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Далее мы должны из второй формулы (теоремы косинусов) выразить через a , b и c сначала $\cos C$, а затем и $\sin C$ и подставить эти выражения в формулу для площади.

Прежде чем перейти к реализации этого плана, заметим, что

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{2p-2c}{2} = p-c.$$

Точно так же имеем

$$\frac{b+c-a}{2} = p-a, \quad \frac{c+a-b}{2} = p-c.$$

Теперь выразим косинус через a , b и c

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Так как любой угол в треугольнике больше 0° и меньше 180° , то $\sin C > 0$. Значит,

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{(1 - \cos C)(1 + \cos C)}.$$

Теперь отдельно преобразуем каждый из сомножителей в подкоренном выражении. Имеем

$$\begin{aligned} 1 - \cos C &= 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab}{2ab} = \frac{c^2 - (a - b)^2}{2ab} = \\ &= \frac{(c - a + b)(c + a - b)}{2ab} = \frac{2(p - a)(p - b)}{ab}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos C &= 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab} = \\ &= \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab} = \frac{2p(p - c)}{ab}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\sin C = \sqrt{(1 - \cos C)(1 + \cos C)} = \frac{2}{ab} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Подставляя это выражение в формулу для площади, получаем

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \blacktriangledown$$

*** Второе доказательство.** Это доказательство «более геометрично» и ближе к методам, которые использовали древние геометры. Нам понадобится понятие вневписанной окружности, введенное на с. 198.

Оказывается, кроме формулы $S = pr$, для площади треугольника справедлива и формула

$$S = (p - a)r_a,$$

где r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC треугольника.

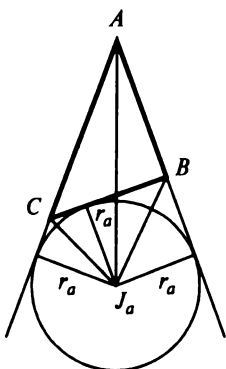


Рис. 256

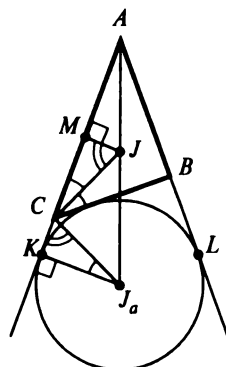


Рис. 257

Докажем эту формулу. Пусть J_a — центр вневписанной окружности, касающейся BC (рис. 256). В каждом из треугольников ABJ_a , BCJ_a , CAJ_a высота, опущенная из J_a , равна r_a . Имеем

$$\begin{aligned} S &= S_{ABC} = S_{ABJ_a} + S_{ACJ_a} - S_{BCJ_a} = \\ &= \frac{1}{2} cr_a + \frac{1}{2} br_a - \frac{1}{2} ar_a = \frac{b + c - a}{2} r_a = (p - a) r_a. \end{aligned}$$

Теперь выведем еще одну формулу, связывающую r и r_a .

Пусть J — центр вписанной окружности; M — точка касания вписанной окружности с AC , K — точка касания рассматриваемой вневписанной окружности с продолжением AC (рис. 257). Отрезки CM и CK мы уже находили: $CM = p - c$, $CK = p - b$.

Напомним, как можно найти CK . Имеем: $CK + BL = BC = a$. Значит, $AK + AL = AC + AB + BC = 2p$. Но $AK = AL$, следовательно, $AK = p$ и $CK = AK - AC = p - b$.

Рассмотрим два прямоугольных треугольника CJM и CJ_aK .

В первом из них угол при вершине C равен $\frac{C}{2}$, так как CJ — биссектриса угла C , а угол при вершине J равен $90^\circ - \frac{C}{2}$. В треугольнике CJ_aK угол при вершине C равен половине угла KCB , т. е. $\frac{1}{2}(180^\circ - C) = 90^\circ - \frac{C}{2}$.

Таким образом, прямоугольные треугольники CJM и J_aCK подобны, поскольку у них углы при вершинах J и C соответственно равны. Из подобия получаем

$$\frac{CM}{MJ} = \frac{KJ_a}{CK} \quad \text{или} \quad \frac{p - c}{r} = \frac{r_a}{p - b}, \quad r r_a = (p - b)(p - c).$$

Запишем следующие три равенства:

$$S = pr, \quad S = (p - a)r_a, \quad r r_a = (p - b)(p - c).$$

Перемножим два первых равенства и заменим $r \cdot r_a$ его значением:

$$S^2 = p(p - a)r r_a = p(p - a)(p - b)(p - c).$$

Получена формула Герона. ▼

Отношение площадей подобных фигур

Сформулируем и докажем одну простую, даже очевидную, но очень важную теорему.

Теорема 9.2.

Площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных линейных элементов.

Или, иначе, *отношение площадей двух подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия* (рис. 258).

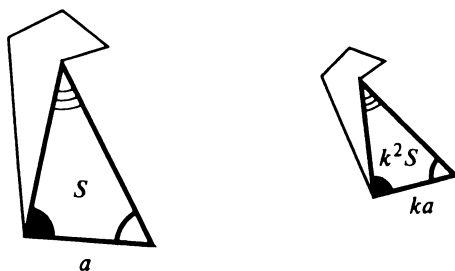


Рис. 258

Доказательство. Докажем эту теорему для треугольников. Требуемое утверждение можно получить на основании любой формулы, выражающей площадь треугольника. Пусть коэффициент подобия второго треугольника по отношению к первому равен k .

Если a — сторона первого треугольника, то ей соответствует сторона ka второго. Все углы в треугольниках соответственно равны. Утверждение теоремы следует теперь из формулы (2) для площади треугольника.

Утверждение теоремы легко распространяется на подобные многоугольники, поскольку их можно разбить на соответственно подобные треугольники.

Что же касается произвольных подобных фигур, то здесь мы ограничимся одним общим замечанием. Произвольные подобные фигуры можно сколь угодно точно приблизить соответственно подобными многоугольниками, для которых теорема доказана. На основании этого мы делаем вывод, что она верна и для произвольных подобных фигур. ▼

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

- 1(в). Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a .
- 2(в). Внутри параллелограмма взята точка. Эту точку соединили со всеми вершинами параллелограмма. Докажите, что сумма площадей двух треугольников, прилежащих к противоположным сторонам параллелограмма, составляет половину его площади.
3. Два параллелограмма расположены так, как показано на рисунке 259. Докажите, что эти параллелограммы равновелики.

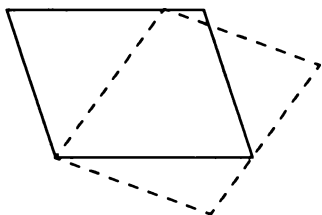


Рис. 259

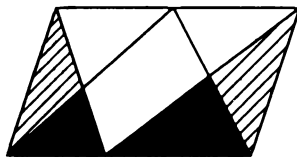


Рис. 260

- 4(т). Параллелограмм разделен на шесть треугольников и один четырехугольник, как на рисунке 260. Докажите, что сумма площадей двух черных треугольников равна сумме площадей двух белых треугольников, а сумма площадей двух заштрихованных треугольников равна площади четырехугольника.

- 5(в). Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.
- 6(п). Три высоты треугольника меньше 1. Может ли его площадь быть больше 10 квадратных единиц?
- 7(в). Пусть M — произвольная точка на медиане треугольника ABC , выходящей из вершины A . Докажите, что треугольники ABM и ACM равновелики.
- 8(в). Имеется треугольник ABC . Найдите геометрическое место точек M таких, что треугольник ABM равновелик треугольнику ABC .
- 9(п). Имеется треугольник ABC . Найдите геометрическое место точек M таких, что треугольник ABM равновелик треугольнику ACM .
10. Найдите площадь треугольника, если известны три его стороны:
а) 5, 9 и 12; б) 5, 9 и $\sqrt{34}$; в) $\sqrt{29}$, $\sqrt{65}$ и $\sqrt{106}$.
11. Докажите, что при любом a существует треугольник со сторонами $\sqrt{a^2 - a + 1}$, $\sqrt{a^2 + a + 1}$, $\sqrt{4a^2 + 3}$, причем его площадь не зависит от a . Найдите эту площадь.
- 12(в). Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.
- 13(п). Диагонали четырехугольника делят его на четыре треугольника. Площади двух из них, прилежащих к противоположным сторонам четырехугольника, равны. Докажите, что данный четырехугольник трапеция или параллелограмм.
14. В выпуклом четырехугольнике проведены прямые, проходящие через середины его противоположных сторон. Эти прямые делят четырехугольник на четыре четырехугольника. Докажите, что сумма площадей двух противоположных четырехугольников равна сумме двух других четырехугольников (также противоположных).
15. В треугольнике ABC прямая, параллельная BC , пересекает AB и AC соответственно в точках B_1 и C_1 . Найдите площадь треугольника ABC_1 , если площади треугольников ABC и AB_1C_1 равны соответственно p и q .

- 16(п).** Диагонали четырехугольника делят его на четыре треугольника. Докажите, что произведение площадей двух противоположных треугольников равно произведению площадей двух оставшихся.
- 17.** В трапеции проведены диагонали. Площади двух треугольников, прилежащих к основаниям трапеции, равны 4 и 9. Найдите площадь трапеции.
- 18(т).** На отрезке, соединяющем середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$, взята точка M . Докажите, что треугольники AMB и CMD равновелики.
- 19(т).** На отрезке, соединяющем середины оснований трапеции $ABCD$, взята точка M . Докажите, что треугольники AMC и BMD равновелики.
- 20(т).** Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известны площади треугольников ABD , ACD и AED , где E — точка пересечения диагоналей. Площади этих треугольников равны соответственно p , q и r .
- 21(т).** Основания трапеции равны a и b . Найдите длину отрезка прямой внутри трапеции, параллельной ее основаниям и делящей площадь трапеции пополам.
- 22.** Найдите площадь заштрихованной фигуры (рис. 261). Сторона квадрата и диаметры полукругов равны 1, диаметры окружностей равны $1/2$.

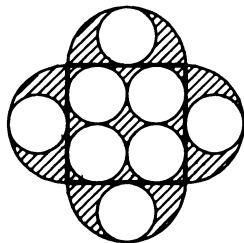


Рис. 261

- 23.** На катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника как на диаметрах построены полуокружности. Полуокружности на катетах расположены вне треугольника, а полуокружность на гипотенузе содержит треугольник. Докажите, что общая площадь частей меньших полукругов вне большего равна площади треугольника.
- 24.** Рисунок 262 иллюстрирует известный парадокс. Квадрат 8×8 разрезан на четыре части, из которых составлен прямоугольник 13×5 . Значит, $64 = 65$? Объясните, где здесь допущена ошибка.

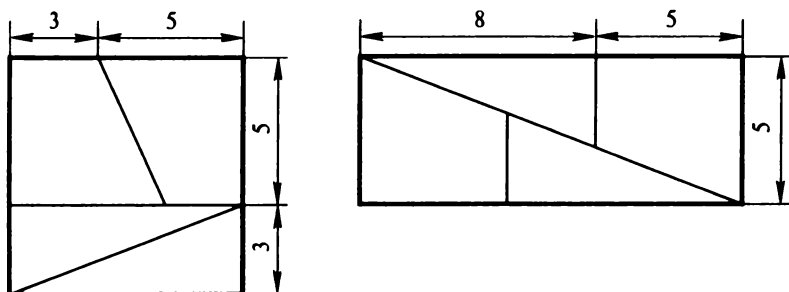


Рис. 262

- 25(т).** Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 3 и 4, а радиус вписанной окружности равен 1.
- 26(п).** Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон — величина постоянная.
- 27(п).** Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри выпуклого равностороннего многоугольника до его сторон величина постоянная.
- 28.** Найдите площадь поверхности треугольной пирамиды, все ребра которой равны 1.
- 29.** Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны a , b и c .
- 30.** В треугольной пирамиде $ABCD$ каждые два ребра, выходящие из вершины D , перпендикулярны, $DA = 1$, $DB = 2$, $DC = 3$. Найдите площади всех граней этой пирамиды.
- 31.** В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра, выходящие из вершины D , попарно перпендикулярны. Докажите, что квадрат площади треугольника ABC равен сумме квадратов площадей треугольников DAB , DBC и DCA (теорема Пифагора для треугольной пирамиды).
- 32.** Имеется крест, образованный пятью равными квадратами (один квадрат в центре, а четыре другие прилежат к его сторонам). Покажите, каким образом шестью такими крестами, вырезанными из бумаги, можно оклеить поверхность куба, каждая грань которого равновелика одному кресту.

9.3. Площади в теоремах и задачах

Понятие площади можно с успехом использовать при доказательстве различных теорем и решении задач, причем даже тех, в формулировках которых отсутствует упоминание о площади. Поэтому можно говорить о методе площадей в геометрии.

Но об этом методе несколько позже, а сначала мы приведем еще одно доказательство теоремы Пифагора.

Еще одно доказательство теоремы Пифагора

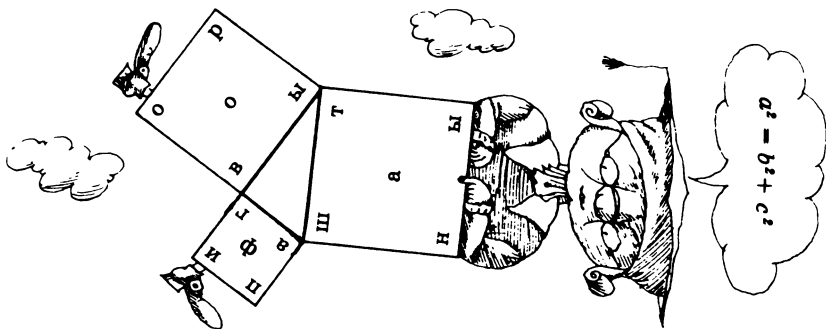
С точки зрения понятия площади теорема Пифагора утверждает следующее.

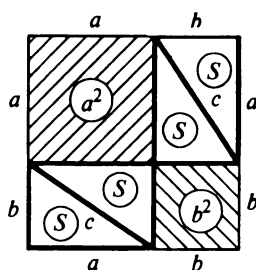
Теорема Пифагора (другая формулировка).

Сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на его гипотенузе.

Именно так, или почти так выглядела изначальная, классическая формулировка теоремы. Картинка, иллюстрирующая теорему Пифагора, была ранее своеобразным символом геометрии, а в среде российских гимназистов получила название «Пифагоровы штаны». Саму теорему они переименовали так: «Пифагоровы штаны на все стороны равны». И в этой шуточной формулировке запоминали ее на всю жизнь.

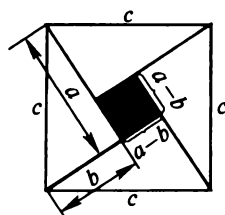
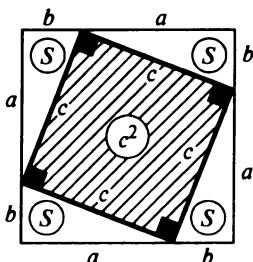
Приведем одно из многочисленных геометрических доказательств теоремы Пифагора. Оно отлично от доказательства самого Пифагора, но широко известно и даже встречается в художественной литературе. Впрочем, по сути, и доказательства как такового нет. Все сводится к





$$4S + a^2 + b^2 = 4S + c^2$$

Рис. 263



$$c^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

Рис. 264

«предъявлению» двух картинок (рис. 263), посмотрев на которые вы без труда убедитесь, что теорема Пифагора доказана!.. Убедились?

Рисунок 264 демонстрирует старинное индийское доказательство теоремы Пифагора. Этот рисунок можно найти в сочинении Бхаскары (индийский математик, живший в XII в.). Оно сопровождается одним словом: «Смотри».

Метод площадей

Интересно, что метод площадей оказывается близким «родственником» метода подобия. Во всяком случае, во многих теоремах и задачах они с успехом заменяют друг друга.

Вот как доказывается с помощью понятия площади теорема о медианах треугольника.

Теорема о медианах треугольника, второе доказательство

Теорема.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершин треугольника.

Доказательство. Рассуждение, которое мы сейчас приведем, основано на понятии геометрического места точек и сходно с теми, которые использовались при доказательстве теорем о серединных перпендикулярах к сторонам треугольника, биссектрисах и высотах.

С точки зрения понятия геометрического места точек медиана AA_1 треугольника ABC представляет собой геометрическое место то-

чек M внутри треугольника, для которых треугольники ABM и ACM равновелики (см. задачу 8 к § 9.2).

В самом деле, так как треугольники BAA_1 и CAA_1 равновелики, то равны и их высоты к общей стороне AA_1 (рис. 265). Поэтому для любой точки M на AA_1 также будут равны высоты к AM в треугольниках BAM и CAM , а значит, эти треугольники для всех M равновелики.

Точно так же проводится и обратное рассуждение. Если точка M внутри треугольника ABC такова, что треугольники ABM и ACM равновелики, то равны и высоты этих треугольников к общей стороне AM .

Пусть AM пересекает BC в точке A'_1 (рис. 266). Треугольники BAA'_1 и CAA'_1 равновелики, поскольку у них AA'_1 общая сторона, а высоты, опущенные на нее, равны. И из равенства площадей треугольников BAA'_1 и CAA'_1 следует, что A'_1 — середина BC , т. е. точка A'_1 совпадает с A_1 .

Проведем теперь в треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 и обозначим через K точку их пересечения (рис. 267).

Точка K лежит на соответствующих медианах, поэтому равновеликими являются треугольники ABK и ACK , а также BAK и BCK . Значит, треугольники BCK и ACK равновелики и K лежит на медиане CC_1 . Таким образом, K — точка пересечения всех трех медиан.

Далее, площадь треугольника BAK составляет $\frac{1}{3}$ площади всего треугольника, а площадь треугольника ABA_1 равна половине пло-

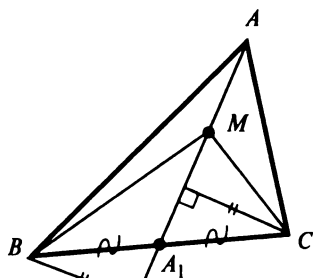


Рис. 265

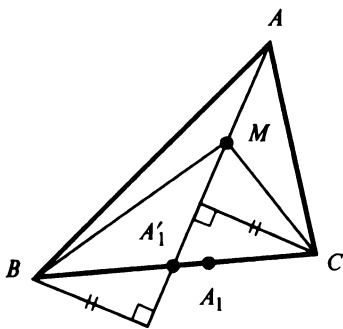


Рис. 266

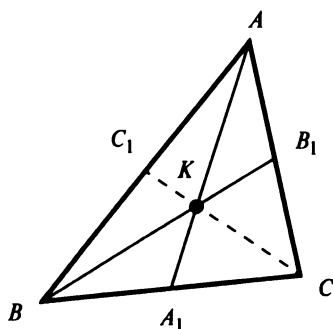


Рис. 267

щади всего треугольника. Следовательно, площадь треугольника ABK равна $\frac{2}{3}$ площади треугольника ABA_1 , а значит, и AK равно $\frac{2}{3}$ от AA_1 , $AK : KA_1 = 2 : 1$.

Утверждение теоремы доказано полностью. ▼

Теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника. Второе доказательство

Таким же образом, используя формулу (1) для площади треугольника, можно доказать и теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника.

Теорема.

Если AA_1 — биссектриса угла A треугольника ABC , то

$$BA_1 : A_1C = BA : AC.$$

Доказательство. Пусть угол при вершине A в треугольнике ABC равен 2α . Рассмотрим треугольники BAA_1 и CAA_1 (рис. 268). Их площади относятся как отрезки BA_1 и A_1C , поскольку высота к этим сторонам в рассматриваемых треугольниках общая.

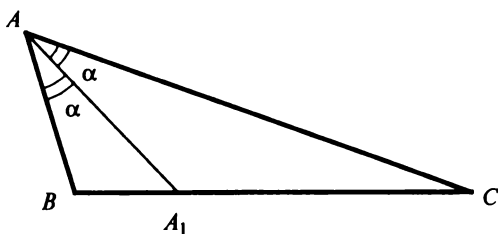


Рис. 268

С другой стороны, воспользуемся для площадей этих треугольников формулой (1). Имеем

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{BAA_1}}{S_{CAA_1}} = \frac{\frac{1}{2} BA \cdot AA_1 \sin \alpha}{\frac{1}{2} AC \cdot AA_1 \sin \alpha} = \frac{BA}{AC}. \quad \blacktriangledown$$

(См. также задачу 6 в конце этого параграфа.)

Как видим, при доказательстве обеих теорем мы использовали один очень простой факт:

если два треугольника имеют общую вершину, а противолежащие этой вершине стороны расположены на одной прямой, то площади треугольников относятся как стороны, лежащие на одной прямой.

Этот факт является частным случаем следующего более общего утверждения, которое также необходимо запомнить.

Одна важная задача

Задача 1. Пусть две прямые пересекаются в точке A ; B и B_1 — любые две точки на одной прямой, а C и C_1 — на другой. Докажите, что

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1}{AB} \cdot \frac{AC_1}{AC}.$$

Решение. Утверждение задачи следует из формулы (1) для площади треугольника. Ведь у треугольников AB_1C_1 и ABC (рис. 269) углы при вершине A либо равны, либо дополняют друг друга до 180° , т. е. в любом случае их синусы равны. Значит,

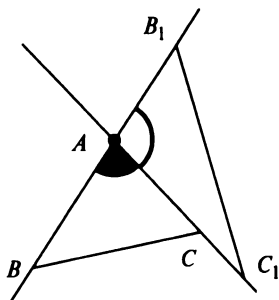


Рис. 269

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AB_1 \cdot AC_1 \sin \angle B_1AC_1}{\frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle BAC} = \frac{AB_1}{AB} \cdot \frac{AC_1}{AC}. \blacktriangledown$$

Еще один метод, основанный на понятии площади

Задача 2. Докажите, что длину биссектрисы AA_1 треугольника ABC можно вычислять по формуле

$$l = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b + c},$$

где $b = AC$, $c = AB$, A — угол BAC (рис. 270).

Решение. Будем исходить из очевидного равенства

$$S_{BAC} = S_{BAA_1} + S_{CAA_1}$$

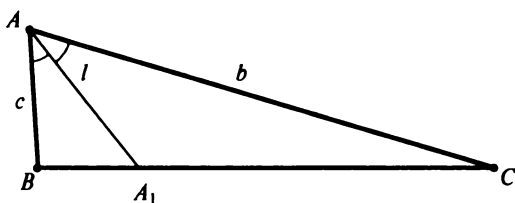


Рис. 270

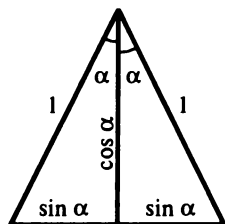


Рис. 271

или

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} cl \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} bl \sin \frac{A}{2}.$$

Далее воспользуемся формулой $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$. (Эта формула вытекает из доказанных нами в § 7.2 формул сложения. Ниже мы докажем ее «методом площадей».)

Заменив в левой части равенства $\sin A = 2\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$ и сократив обе его части на $\frac{1}{2} \sin \frac{A}{2}$, получим

$$2bc \cos \frac{A}{2} = (b + c)l,$$

откуда

$$l = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}. \blacktriangledown$$

* Вывод формулы синуса двойного угла

Рассмотрим равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными 1, и углом 2α между ними (рис. 271). Высота, она же биссектриса, разбивает треугольник на два равных прямоугольных треугольника с катетами $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. Площадь каждого из них равна $\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, площадь всего треугольника равна $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$. Значит, $2 \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$, $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Отношение отрезков диагонали четырехугольника

Решим еще одну полезную задачу.

Задача 3. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Тогда имеет место равенство $\frac{AO}{CO} = \frac{S_{ABD}}{S_{CBD}}$.

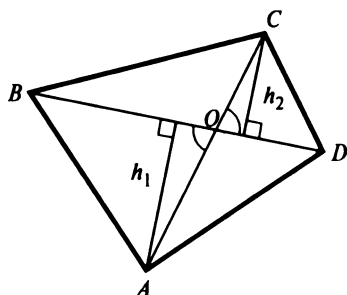


Рис. 272

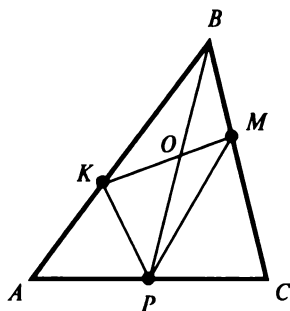


Рис. 273

Решение. Пусть h_1 и h_2 — соответственно высоты в треугольниках ABD и CBD , проведенные к стороне BD (рис. 272). Понятно, что

$$\frac{AO}{CO} = \frac{h_1}{h_2}. \text{ Значит,}$$

$$\frac{AO}{CO} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{1}{2}h_1 \cdot BD}{\frac{1}{2}h_2 \cdot BD} = \frac{S_{ABD}}{S_{CBD}}. \blacktriangledown$$

* Одна типичная задача

В следующей задаче мы будем использовать результаты, полученные в задачах 1 и 3.

Задача 4. В треугольнике ABC на сторонах AB , BC и CA взяты соответственно точки K , M и P так, что $AK:KB = 2:3$, $BM:MC = 3:4$, $CP:HP = 4:5$. В каком отношении отрезок BP делится отрезком KM ?

Решение. Обозначим через O точку пересечения BP и KM (рис. 273). Пусть $S_{ABC} = S$. В соответствии с формулой, полученной в задаче 1, имеем

$$S_{KBM} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} S = \frac{9}{35} S, \quad S_{CMP} = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{9} S = \frac{16}{63} S, \quad S_{APK} = \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5} S = \frac{2}{9} S.$$

Следовательно,

$$S_{KPM} = S \left(1 - \frac{9}{35} - \frac{16}{63} - \frac{2}{9} \right) = \frac{4}{15} S.$$

Теперь, в соответствии с формулой, полученной в задаче 3, имеем

$$\frac{BO}{OP} = \frac{S_{KBM}}{S_{KPM}} = \frac{9}{35} \cdot \frac{15}{4} = \frac{27}{28} \cdot \blacktriangledown$$

* Составление уравнений

Формулы, выражающие площадь треугольника, могут быть с успехом использованы для составления уравнений: приравняются два выражения для площади треугольника.

Мы надеемся, что основная идея такого подхода очевидна, и поэтому рассмотрим не совсем типичный, но красивый пример.

Задача 5. Пусть r — радиус окружности, вписанной в арбелос (что такое арбелос, объяснено на с. 227), h — расстояние от центра этой окружности до общего диаметра трех полуокружностей, образующих арбелос. Докажите, что $h = 2r$.

Решение. Обозначим через O_1 , O_2 и O_3 центры данных полуокружностей (O_3 — центр большей из них), O — центр вписанной окружности (рис. 274). Пусть радиусы полуокружностей с центрами O_1 и O_2 равны соответственно a и b .

Далее будем следовать обычной схеме: рассмотрим треугольники O_1O_3O и O_1O_2O и выразим их стороны через a , b и r , учитывая соответствующие касания. Имеем: $O_1O_3 = b$, $O_2O_3 = a$, $O_1O = a + r$, $O_3O = a + b - r$, $O_2O = b + r$.

Площадь каждого из рассматриваемых треугольников выразим по формуле Герона и по основной формуле и полученные выражения приравняем друг другу.

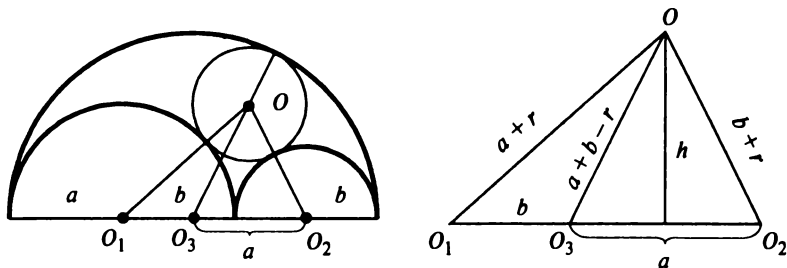


Рис. 274

Для треугольника O_1O_3O ($p = a + b$)

$$\sqrt{(a + b)a(b - r)r} = \frac{1}{2}bh.$$

Для треугольника O_1O_2O ($p = a + b + r$)

$$\sqrt{(a + b + r)rab} = \frac{1}{2}(a + b)h.$$

Возведем полученные уравнения в квадрат и вычтем первое из второго:

$$ar((a + b + r)b - (a + b)(b - r)) = \frac{h^2}{4}((a + b)^2 - b^2),$$

$$ar(\cancel{ab} + b^2 + br - \cancel{ab} + ar - \cancel{b^2} + br) = \frac{h^2}{4}a(2b + a),$$

$$ar^2(a + 2b) = \frac{h^2}{4}a(a + 2b), \quad h^2 = 4r^2, \quad h = 2r. \quad \blacktriangledown$$

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

1. Найдите длину биссектрисы прямого угла в прямоугольном треугольнике с катетами a и b .
2. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $BC = a$, $AC = b$ на гипотенузе AB взята точка D так, что $\angle DCA = 30^\circ$. Найдите длину отрезка CD .
- 3(в). На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты точки K , M и P так, что $AK : KB = 1 : 2$, $BM : MC = 2 : 3$, $CP : PA = 3 : 4$. Площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь треугольника KMP .
4. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты точки K , M и P . Известно, что $AK : KB = 2 : 5$, а $BM : MC = 7 : 4$ и что треугольники AKP и $CMР$ равновелики. Найдите $CP : PA$.
5. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна 1. На сторонах AB , BC , CD и DA взяты точки K , M , P и L соответственно. Известно, что K — середина AB , $BM : MC = 1 : 5$, $CP : PD = 2 : 1$, $DL : LA = 1 : 3$. Найдите площадь шестиугольника $AKMCPL$.

6(п). Биссектриса угла, внешнего по отношению к углу A треугольника ABC , пересекает прямую BC в точке A_1 . Докажите, что $BA_1 : A_1C = BA : AC$.

7. В треугольнике ABC угол C равен 30° , $BC = a$, $CA = b$. Прямая, проходящая через C перпендикулярно CB , пересекает прямую AB в точке M . Найдите длину отрезка CM .

8(т). В прямоугольном треугольнике ABC , катеты которого CB и CA равны a и b ($a \neq b$), проведена прямая, касающаяся описанной около этого треугольника окружности в точке C . Эта прямая пересекает продолжение AB в точке D . Найдите CD .

9(т). На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки K и M так, что $AK : KB = BM : MC = 1 : 5$. В каком отношении прямая KM делит медиану, выходящую из вершины B ?

10(т). Из вершины B треугольника ABC выходят две прямые, делящие AC на три равные части. В каком отношении эти прямые делят медиану, выходящую из вершины A ?

11. Вершины A, B, C и D параллелограмма $ABCD$ соединены прямыми соответственно с серединами сторон BC, CD, DA и AB . Найдите площадь параллелограмма, ограниченного этими прямыми, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

12(п). Рассмотрим треугольник ABC .

Пусть CD — высота этого треугольника — образует углы α и β (α и β — острые углы) с AC и BC , причем точка D расположена между A и B (рис. 275). Выразив площадь треугольника ABC через стороны AC и CB и угол между ними и как сумму площадей треугольников ACD и BCD , найдите формулу для $\sin(\alpha + \beta)$.

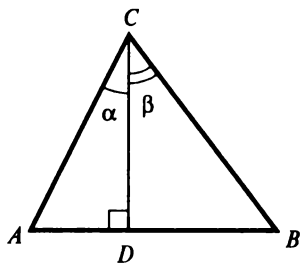


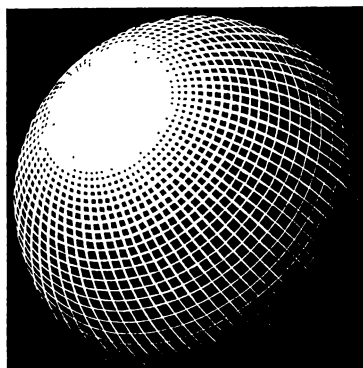
Рис. 275

13(т). На плоскости имеется угол, равный 75° , с вершиной O . На сторонах угла взяты точки A и B так, что $OA = \sqrt{2}$, $OB = \sqrt{3}$. На луче, расположенном внутри угла и имеющем начало O , взята точка C так, что $OC = \frac{1}{2} \sqrt{6}$. Известно также, что $\angle AOC = 30^\circ$. Докажите, что точки A, C и B лежат на одной прямой.

- 14(т). Площадь прямоугольного треугольника равна S . Из середины медианы к гипотенузе этого треугольника опущены перпендикуляры на его стороны. Найдите площадь треугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров.
- 15(т). На сторонах AB , BC и CA взяты точки K , M и P так, что $AK:AB = BM:BC = CP:CA = 1:3$. Докажите, что площадь треугольника, ограниченного прямыми AM , BP и CK , составляет $\frac{1}{7}$ площади треугольника ABC .
- 16(т). В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB , равной c , на высоте CD , как на диаметре, построена окружность. Касательные к этой окружности, проходящие через точки A и B , пересекаются при продолжении в точке K . Чему равны касательные к окружности, выходящие из K ?
17. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, его диагонали AC и BD пересекаются в точке M . Докажите, что

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}.$$

Длина окружности, площадь круга



*О*кружность и круг с незапамятных времен манили и очаровывали человека совершенством своей формы и той таинственностью, которая всегда сопутствует совершенству. Их обожествляли, им поклонялись, приписывали различные магические и даже целебные свойства, а ученые терпеливо и настойчиво изучали, пытаясь проникнуть в суть многочисленных загадок, связанных с этими фигурами.

Возможно, вы слышали выражение «квадратура круга», которым часто характеризуют очень сложную или неразрешимую задачу. А каков точный смысл этих слов?

Не одно поколение математиков трудилось над решением проблемы о нахождении длины окружности и площади круга. Одной из

трех древнейших задач математики является задача о квадратуре круга, т. е. построении квадрата, площадь которого равна площади данного круга. (Две другие задачи — это задача о трисекции угла, т. е. делении его на три равные части, и удвоении куба — построении отрезка, равного ребру куба, объем которого в два раза больше объема данного куба.) Лишь в XIX в. было доказано, что все эти три задачи неразрешимы, так как соответствующие построения с помощью циркуля и линейки невозможны (что, впрочем, не исключает возможность их решения с привлечением других средств). И хотя все эти задачи в настоящее время полностью исследованы и интереса для математики не представляют, и поныне встречаются люди, предлагающие свои решения данных задач, что следует считать скорее признаком необразованности, чем любознательности.

Задачи, связанные с измерениями длины окружности и площади круга, порождают одну из важнейших в науке и технике постоянных — число π . Удивительным образом число π появляется также в самых различных математических и нематематических исследованиях, на первый взгляд, очень далеких от геометрии, как бы подчеркивая цельность и единство науки.

10.1. Правильные многоугольники

Определение правильного многоугольника. Простейшие свойства

Многоугольник называется **правильным**, если у него равны все стороны и все углы (рис. 276).

В частности, равносторонний треугольник является правильным, поскольку из равенства его сторон следует и равенство углов. Правильные многоугольники тесно связаны с окружностью. Если мы разделим окружность на n равных дуг и точки деления последовательно соединим, то получим правильный n -угольник, вписанный в эту окружность. Другими словами, равносторонний n -угольник, вписанный в окружность, является правильным.

Если же через точки деления провести касательные к окружности, то получим правильный n -угольник, описанный около окружности. Верно и обратное утверждение:



Рис. 276

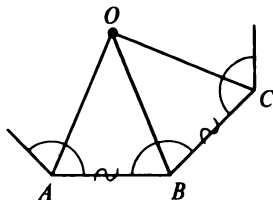


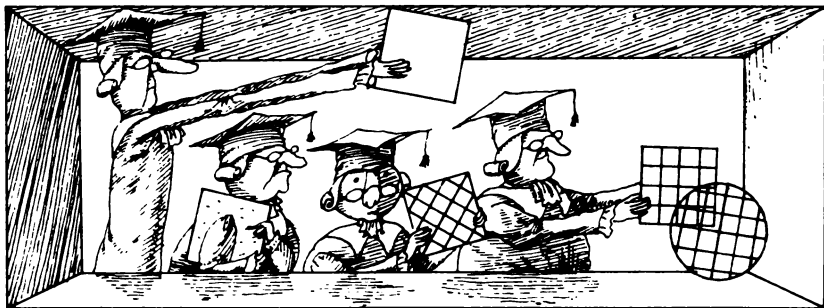
Рис. 277

любой правильный многоугольник является одновременно вписанным и описанным, причем центры описанной и вписанной окружностей совпадают.

Докажем это. Пусть AB — одна из сторон правильного n -угольника (рис. 277). Проведем в этом многоугольнике биссектрисы углов A и B и обозначим через O точку их пересечения. Треугольник AOB равнобедренный, $AO = OB$.

Если теперь взять соседнюю с AB сторону этого правильного n -угольника (сторону BC) и выполнить для нее то же самое построение, то получим равнобедренный треугольник с основанием BC , равный треугольнику AOB . А так как биссектриса угла B содержит одну сторону каждого из этих равнобедренных треугольников, то они должны иметь и общую вершину O .

Таким образом, биссектрисы всех углов правильного многоугольника пересекаются в одной точке O и эта точка равноудалена от всех вершин этого многоугольника, т. е. O является центром как описанной около этого многоугольника окружности, так и центром вписанной в него окружности.



Свойство периметра правильного вписанного n -угольника

У правильных многоугольников имеется много интересных свойств. Рассмотрим одно из них, которое послужит основой для наших дальнейших рассуждений.

Теорема 10.1.

Среди всех n -угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный n -угольник.

Доказательство этой теоремы основывается на вспомогательном утверждении.

Лемма.

Из двух неравных треугольников, таких, что одна сторона и противолежащий угол одного из них равны стороне и противолежащему углу другого, больший периметр имеет тот, у которого больше площадь.

Доказательство леммы. Рассмотрим треугольник, у которого одна сторона равна a , а противолежащий ей угол равен φ (рис. 278). Пусть x и y — две другие стороны этого треугольника, S — его площадь.

Запишем теорему косинусов для этого треугольника:

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi = a^2,$$

откуда

$$(x + y)^2 = 2xy(1 + \cos \varphi) + a^2.$$

Но так как $2xy \sin \varphi = S$, то $2xy = \frac{S}{\sin \varphi}$.

Заменим теперь в формуле, выражающей $(x + y)^2$, величину $2xy$ через S :

$$(x + y)^2 = S \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} + a^2.$$

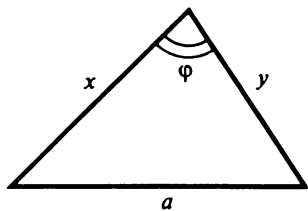


Рис. 278

Из последнего равенства видно, что чем больше S , тем больше и $x + y$, а значит, тем больше и периметр треугольника. Напоминаем, что в треугольнике $\cos \varphi > -1$. ▼

Доказательство теоремы. Рассмотрим произвольный n -угольник, вписанный в окружность. Пусть этот n -угольник содержит центр окружности и не является правильным. Если a_n — сторона правильного n -угольника, вписанного в эту же окружность, то в рассматриваемом n -угольнике должны найтись стороны как боль-

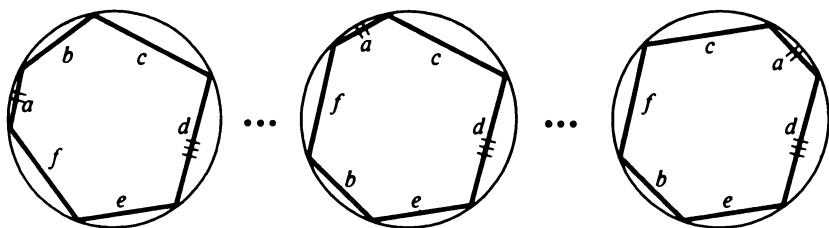


Рис. 279

шие a_n , так и меньшие a_n . (Понятно, что все стороны любого вписанного n -угольника, содержащего центр окружности, не могут быть больше a_n , равно как и не могут быть меньше a_n .)

В любом вписанном многоугольнике можно переставлять любые две стороны, при этом периметр не меняется. Переставляя попарно соседние стороны рассматриваемого n -угольника, мы можем добиться, чтобы те две выделенные стороны, одна из которых больше a_n , а другая меньше a_n , оказались соседними (рис. 279).

Обозначим эти соседние стороны через AB и BC , пусть при этом $AB > a_n$, $BC < a_n$ (рис. 280). Возьмем теперь на дуге AC , содержащей точку B , точку B_1 так, что $AB_1 = a_n$. Такая точка найдется. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим хорду BB_0 , параллельную AC . Так как $AB_0 = BC < a_n$, $AB > a_n$, то окружность с центром в A и радиусом a_n непременно пересечет дугу B_0B в точке B_1 . Площадь треугольника AB_1C больше площади треугольника ABC . У этих треугольников есть общая сторона AC , а углы, ей противолежащие, равны, поскольку опираются на одну и ту же дугу. Согласно лемме, периметр треугольника AB_1C больше периметра треугольника ABC .

Но A , B и C — три соседние вершины вписанного n -угольника. Если мы рассмотрим многоугольник, все вершины которого, кроме B , совпадают с вершинами этого же n -угольника, а вершина B заменена на B_1 , то новый n -угольник имеет больший периметр и при этом одна из его сторон равна a_n — стороне правильного вписанного n -угольника.

Если получившийся n -угольник по-прежнему не является правильным, то в нем также найдутся две стороны, одна из которых больше a_n , а другая меньше a_n . И вновь можно увеличить его периметр, сделав

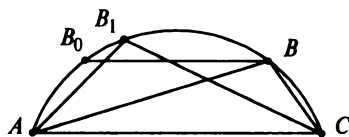


Рис. 280

еще одну сторону равной a_n . Через конечное число шагов (самое большее через $n - 1$) мы придем к правильному n -угольнику. Значит, периметр правильного n -угольника больше периметра любого n -угольника, вписанного в ту же окружность. ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

- 1(в). Выразите сторону правильного треугольника, четырехугольника и шестиугольника через радиус описанной окружности и через радиус вписанной окружности.
- 2(в). Сторона правильного n -угольника равна a_n . Найдите радиус описанной и вписанной окружности этого n -угольника, если $n = 3, 4, 6$.
3. Постройте правильный треугольник, четырехугольник и шестиугольник, вписанные в данную окружность.
4. Постройте правильный двенадцатиугольник, вписанный в данную окружность.
5. Постройте правильный двенадцатиугольник. Постарайтесь выполнить это построение как можно точнее, а сам многоугольник изобразите достаточно большим. Проведите в нем все диагонали. Внимательно изучите получившуюся картинку. Найдите точки, отличные от центра, в которых пересекаются ровно три диагонали, четыре диагонали. Попробуйте обосновать этот экспериментальный факт.
6. Дана окружность, причем указан ее центр. Только с помощью циркуля впишите в эту окружность правильный шестиугольник и правильный треугольник.
- 7(п). Дана окружность с указанным центром. Впишите в нее квадрат только с помощью циркуля (*подсказка*: можно воспользоваться тем, что треугольник со сторонами $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ является прямоугольным).
8. В окружность радиуса R впишите правильный треугольник, в него впишите окружность, в эту окружность впишите квадрат, в квадрат вновь впишите окружность, в эту окружность впишите правильный шестиугольник и в него вновь впишите ок-

ружность. Найдите радиус последней окружности. Изменится ли ответ на вопрос задачи, если последовательность вписанных многоугольников изменить на обратную: сначала вписываем шестиугольник, затем квадрат, а потом треугольник?

9(п). Воспользовавшись результатом задачи 15 к § 7.2, выразите сторону правильного десятиугольника через радиус описанной окружности.

10. Найдите сторону правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса R .

11. Предложите способ построения правильного десятиугольника и правильного пятиугольника, вписанных в данную окружность.

12(в). Все углы вписанного многоугольника равны между собой. Следует ли из этого, что этот многоугольник правильный?

13(в). Все стороны описанного многоугольника равны между собой. Следует ли из этого, что этот многоугольник правильный?

14(т). Все углы вписанного пятиугольника равны между собой. Докажите, что этот пятиугольник правильный.

15(т). Докажите, что если все углы вписанного многоугольника с нечетным числом сторон равны, то этот многоугольник правильный.

16(т). Докажите, что если все стороны описанного многоугольника с нечетным числом сторон равны, то этот многоугольник правильный.

17(т). Все углы многоугольника равны между собой. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри этого многоугольника до его сторон есть величина постоянная.

10.2. Длина окружности

Рассмотрим последовательность вписанных в некоторую окружность правильных многоугольников с возрастающим числом сторон. Можно заметить, что по мере возрастания числа сторон эти многоугольники все более и более «приближаются» к кругу, их гра-

ница «прижимается» к окружности. Для достаточно больших n граница правильного n -угольника практически неотличима от окружности, а его периметр можно считать приблизительно равным длине окружности.

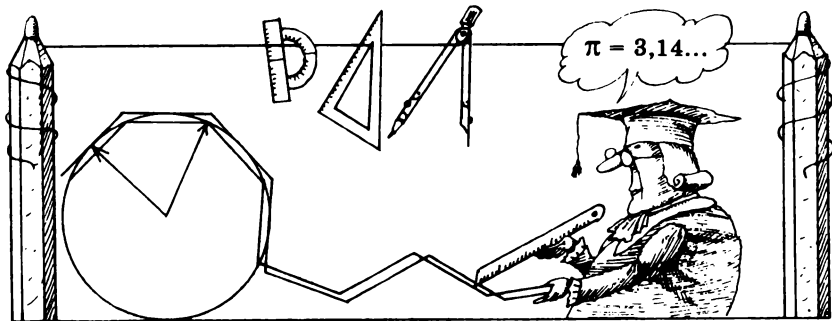
Так или примерно так размышляли геометры древности, приступая к решению задачи о нахождении длины окружности. При этом они понимали, что нет необходимости последовательно находить периметры всех правильных n -угольников: трех-, четырех-, пяти-, ..., n -угольников. Желательно как можно быстрее «добраться» до многоугольников с большим числом сторон.

Формулы удвоения

И здесь на помощь пришли *формулы удвоения*. Оказывается, зная периметр правильного n -угольника, можно найти периметр правильного $2n$ -угольника. Поэтому, начав, например, рассмотрение с шестиугольника, периметр которого всем известен, можно последовательно находить периметры многоугольников с числом сторон 12, 24, 48, 96, ... Безусловно, с возрастанием n резко возрастают вычислительные трудности (если, конечно, не использовать современные вычислительные средства).

С другой стороны, можно рассмотреть последовательность периметров правильных описанных многоугольников, величины которых также можно выразить через соответствующие периметры вписанных многоугольников. Эта последовательность будет уменьшаться, также приближаясь к длине окружности. Так что эта длина «зажимается» двумя последовательностями периметров.

Воспользуемся именно этим способом, тем более что мы гораздо лучше, чем наши предки, вооружены и теоретически, и практически (можем прибегнуть к помощи калькулятора).



Рассмотрим единичную окружность и обозначим через $2p_n$ периметр правильного вписанного в нее n -угольника, а через $2q_n$ — периметр правильного описанного n -угольника. Понятно, что для окружности радиуса R величины периметров надо будет умножить на R .

Имеют место следующие равенства, которые и называются формулами удвоения:

$$p_{2n} = k_n p_n, \quad q_{2n} = k_n p_{2n},$$

где

$$k_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}}}.$$

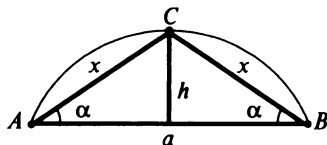


Рис. 281

Доказательство. Пусть A и B — две соседние вершины правильного вписанного n -угольника, C — середина меньшей из дуг с концами A и B ; A , C и B — три последовательные вершины правильного $2n$ -угольника, вписанного в ту же окружность (рис. 281).

Для удобства обозначений будем считать, что $AB = a$, $AC = CB = x$. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника со сторонами x , x и a , равен 1. Для составления уравнения воспользуемся теоремой синусов.

Сначала найдем высоту треугольника ABC , проведенную к основанию AB . Она равна

$$h = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}a^2}.$$

Теперь можно найти синус угла при основании треугольника ABC . Получим

$$\sin \alpha = \frac{h}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}a^2}}{x}.$$

И наконец, на основании теоремы синусов имеем уравнение

$$\frac{x}{\sin \alpha} = 2, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}a^2}} = 2, \quad x^4 - 4x^2 + a^2 = 0.$$

Из этого уравнения найдем x (нам подходит меньший положительный корень, поскольку больший корень больше $\sqrt{2}$):

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} = \frac{a}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a^2}}} \cdot a.$$

Вспомним теперь, что a — это сторона правильного вписанного n -угольника, а x — сторона $2n$ -угольника, т. е.

$$a = \frac{2p_n}{n}, \quad x = \frac{2p_{2n}}{2n} = \frac{p_{2n}}{n}.$$

В результате получаем

$$\frac{p_{2n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}}}, \quad \frac{p_{2n}}{n} = \frac{2p_n}{n},$$

или

$$p_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}}} p_n = k_n p_n.$$

Осталось доказать вторую формулу, утверждающую, что отношение q_{2n} и p_{2n} также равно k_n .

Проведем через вершины A и C правильного вписанного $2n$ -угольника касательные к окружности и обозначим через D точку их пересечения (рис. 282). Точку D можно рассматривать как вершину правильного описанного $2n$ -угольника, при этом A и C — середины соответствующих сторон этого $2n$ -угольника.

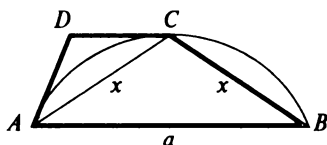


Рис. 282

Треугольники ADC и ACB подобны, поскольку AB и CD параллельны, значи-

чит, $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$. Но AB — сторона правильного вписанного n -угольника, AC — сторона правильного вписанного $2n$ -угольника, AD — половина стороны правильного описанного $2n$ -угольника. Теперь из равенства $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ получаем

$$\frac{4n \cdot AD}{2n \cdot AC} = \frac{2n \cdot AC}{n \cdot AB}, \quad \text{или} \quad \frac{2q_{2n}}{2p_{2n}} = \frac{2p_{2n}}{2p_n}, \quad \frac{q_{2n}}{p_{2n}} = \frac{p_{2n}}{p_n} = k_n.$$

Обе формулы доказаны. ▼

Замечание. Методы тригонометрии позволяют получить формулы удвоения иначе (в некотором смысле быстрее и проще).

Понятно, что, зная радиус окружности R , мы можем выразить сторону правильного вписанного n -угольника. Она равна $2R \sin \frac{180^\circ}{n}$.

(Соединив две соседние вершины с центром, мы получим равнобедренный треугольник, две стороны которого равны R , а угол между ними составляет $\frac{360^\circ}{n}$.) Сторона описанного правильного n -угольника равна $2R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$. У нас $R = 1$, а $2p_n$ и $2q_n$ — периметры правильного вписанного и описанного n -угольников соответственно. Значит,

$$p_n = n \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad p_{2n} = 2n \sin \frac{90^\circ}{n}, \quad q_{2n} = 2n \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{n}.$$

Положим $\frac{90^\circ}{n} = \alpha$. Тогда

$$p_n = n \sin 2\alpha, \quad p_{2n} = 2n \sin \alpha, \quad q_{2n} = 2n \operatorname{tg} \alpha.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{p_n}{n}, \quad \cos 2\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}, \\ \cos \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}} = \frac{1}{k_n}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} p_{2n} &= 2n \sin \alpha = \frac{2n \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{n \sin 2\alpha}{\cos \alpha} = k_n p_n, \\ q_{2n} &= \frac{2n \sin \alpha}{\cos \alpha} = k_n p_{2n}. \end{aligned}$$

Число π

А теперь будем последовательно, начиная с $n = 6$, находить по этим формулам величины p_n и q_n для $n = 12, 24, 48, 96 \dots$ ($p_6 = 3$).

Кроме того, построим еще одну последовательность этих же величин, соответствующую значениям $n = 4, 8, 16, 32, 64, 128$ ($p_4 = 2\sqrt{2} = 2,828\dots$). Результаты этих вычислений оформим в виде таблицы. (Советуем, не доверяя полностью приведенной таблице, проделать вычисления самостоятельно с помощью калькулятора. А вдруг где-то допущена ошибка.)

Напоминаем, что в этой таблице для соответствующих значений n указаны величины полупериметров правильных вписанных в единичную окружность и описанных около нее n -угольников, обозначенных соответственно p_n и q_n .

Бросается в глаза, что с ростом n значения p_n и q_n сближаются, причем последовательность p_n возрастает, а последовательность q_n — убывает. При этом, по мере совпадения у величин p_n и q_n цифр единиц, десятых, сотых, ..., «вырисовывается» очень знакомое число: 3,14... Действительно, получающееся в результате такого процесса число и есть знаменитое π («пи»), одна из важнейших констант математики (и не только математики).

n	p_n	q_n
4	2,8284	
6	3	
8	3,0615	3,3137
12	3,1058	3,2152
16	3,1215	3,1826
24	3,1326	3,1597
32	3,1366	3,1517
48	3,1394	3,1461
64	3,1403	3,1441
96	3,1410	3,1427
128	3,1413	3,1422

Число π равно длине единичной полуокружности. Удваивая число сторон вписанных и описанных n -угольников, мы можем получать все больше и больше знаков числа π .

И здесь нельзя не восхититься достижениями древних геометров, в частности великого Архимеда. Не располагая алгебраическим аппаратом, хитроумно распрямляя периметры вписанного и описанного 96-угольника, он пришел к выводу, что π заключено в пределах от $3\frac{10}{71}$ до $3\frac{1}{7}$ (рис. 283). Так как разность между правой и ле-

вой границей $\left(3\frac{1}{7} - 3\frac{10}{71}\right)$ мало отличается от 0,002, то это означает, что Архимед вычислил π с погрешностью не более чем 0,001.

В дальнейшем, рассматривая многоугольники с еще бóльшим числом сторон и комбинируя вписанные и описанные многоугольники, ученые получали все больше и больше знаков числа π . «Рекордом» следует считать достижение голландского математи-

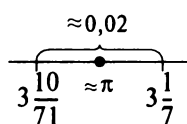


Рис. 283

ка Ван Роумана, который во второй половине XVI в. сумел найти 17(!) знаков числа π .

В дальнейшем появились иные методы, позволявшие вычислять знаки числа π быстрее и проще. Когда же в XX в. в это «состязание» включились ЭВМ, были найдены несколько десятков тысяч знаков числа π .

Конечно, никакого практического смысла знание большого количества знаков π не имеет. Более того, в реальной жизни человек вполне обходится достижением Архимеда, полагая в практических задачах π равным 3,14. И все же следует запомнить, что 3,14 лишь приближенное значение числа π . На всякий случай укажем его значение с большей точностью: $\pi = 3,14159265358\dots$, хотя такое количество знаков вам никогда не понадобится. А вот то, что $3,14 < \pi < 3,15$ следует запомнить.

Длина окружности и ее дуги

Итак, длина единичной окружности равна 2π . Если же мы рассмотрим окружность радиуса R , то увидим, что периметры всех вписанных и описанных n -угольников для этой окружности получаются из соответствующих периметров для единичной окружности умножением на R . Следовательно, длина окружности радиуса R равна

$$L = 2\pi R.$$

Таким образом, π — это отношение длины окружности к ее диаметру.

Центральному углу в 1° соответствует дуга, длина которой равна

$$\frac{1}{360} \text{ длины всей окружности, т. е. } \frac{\pi R}{180}.$$

Таким образом, длина дуги, соответствующей центральному углу в n° , или просто длина дуги в n° равна (рис. 284)

$$l_n = \frac{\pi R}{180} \cdot n.$$

Радиианная мера углов

Возьмем на плоскости какой-нибудь угол и построим несколько окружностей с центром в вершине этого угла. Каждая окружность образует при пересечении со сторонами угла дугу, длина которой пропорциональна радиусу этой окружности. Или, другими словами, для каждой дуги отношение ее длины к радиусу соответствующей

$$l_n = \frac{\pi R}{180} n$$

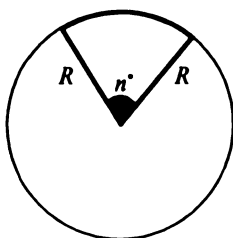


Рис. 284

$$\frac{l'''}{R_3} = \frac{l''}{R_2} = \frac{l'}{R_1} = \alpha$$

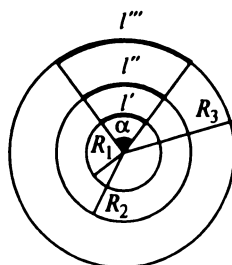


Рис. 285

окружности есть величина постоянная, определяемая самим углом (рис. 285). Это отношение мы и примем за число, выражающее величину угла. Если же эта окружность имеет радиус 1, то длина дуги равна мере соответствующего угла. Такая мера углов называется **радианной**. Как видим, если α — радианная мера угла, то длина соответствующей дуги вычисляется по формуле

$$l = R \alpha.$$

Таким образом, **радианная мера угла** — это число, которое равно отношению длины дуги окружности, для которой этот угол является центральным, к радиусу окружности.

Связь между градусной и радианной мерами углов

Подчеркнем, радианная мера угла — это число. Мы можем рассматривать углы величиной в 1 , $\frac{5}{7}$, $\sqrt{3}$ и даже 100 (это не то же самое, что 100°). Что такое угол в 100 радиан, а этот угол существенно больше угла в 360° , вы узнаете позднее.

Так как развернутому углу, градусная мера которого 180° , соответствует половина окружности, то радианная мера развернутого угла равна π (рис. 286).

Пусть α — радианная мера угла, n — его градусная мера. Пусть, далее, l — длина дуги, соответствующая этому углу. По определению

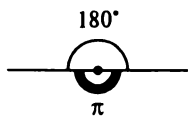


Рис. 286

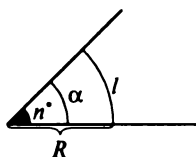


Рис. 287

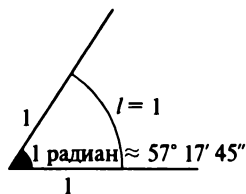


Рис. 288

радианной меры $\frac{l}{R} = \alpha$ или $l = \alpha R$. С другой стороны, $l = l_n = \frac{\pi R}{180} n$.

Приравнявая два выражения для l и сокращая, получаем (рис. 287)

$$\alpha = \frac{\pi}{180} n$$

— формулу для перевода градусной меры в радианную. Из нее следует формула для перевода радианной меры в градусную:

$$n = \frac{180}{\pi} \alpha.$$

Полагая в последней формуле $\alpha = 1$ (рис. 288), найдем, что углу в 1 радиан соответствует угол в $\frac{180}{\pi}$ (градусов) $\approx 57^\circ 17' 45''$.

▲■● Задачи, задания, вопросы

1. В качестве приближенного значения числа π в древнем мире

использовали следующие числа: $\sqrt{10}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$. Оцените погрешность при замене π этими числами.

2(п). а) Представим себе, что земной шар плотно обтянут по экватору веревкой. Допустим теперь, что длину этой веревки увеличили на 1 м и расположили так, что она всюду одинаково отстоит от земли.

Попробуйте, не делая вычислений, по интуиции ответить на вопрос: сможет ли в образовавшийся зазор пролезть мышь? А теперь проверьте ответ вычислением. Надо ли для этого знать радиус земного шара?

б)(т). Усложним задачу. «Оттянем» веревку в каком-то месте поверхности земли как можно дальше. Сможет ли теперь под веревкой пройти слон? (Радиус Земли можно считать приблизительно равным 6400 км.)

3. Найдите сторону правильного восьмиугольника, вписанного в окружность радиуса 1, и сторону правильного описанного восьмиугольника. Оцените величину π с помощью периметров этих многоугольников. (Все вычисления делать без помощи калькулятора.)
4. В единичной окружности проведены хорды длиной $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Как относятся длины меньших дуг, соответствующих этим хордам?
5. Каким должен быть радиус окружности, в которой дуга в 1° имеет длину 1 м?
6. Переведите в радианную меру углы в 10° , 30° , 50° , 70° , 100° , 135° , 175° .
7. Переведите в градусную меру углы, величина которых в радианах равна $\frac{\pi}{20}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, 0, 8π , 0,8, 3, $\frac{1}{3}$.
- 8(в). Вычислите значения всех четырех тригонометрических функций углов величиной в $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, π .

* 10.3. Длина окружности (продолжение)

Возможно, у кого-то возник ряд вопросов и даже сомнений относительно обоснованности выводов, сделанных в § 10.2. Действительно, почему при удвоении числа сторон правильных многоугольников периметры вписанных и описанных многоугольников сходятся к одному и тому же числу? Да и само существование такого числа для каждой из этих последовательностей может вызвать сомнение. На основании чего мы убеждены, что, начиная процесс удвоения с различных многоугольников, мы придем к одному и тому же результату? А если рассматривать другие последовательности много-

угольников с возрастающим числом сторон? Получим ли мы в качестве длины окружности одно и то же число?

Попробуем отчасти ответить на эти вопросы. Для этого докажем одну теорему.

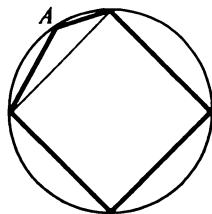
Монотонность периметров вписанных n -угольников

Теорема 10.2.

Периметр правильного $(n + 1)$ -угольника, вписанного в окружность, больше периметра правильного n -угольника, вписанного в ту же окружность.

Доказательство. Из теоремы 10.1 следует, что среди всех n -угольников, вписанных в некоторую окружность, наибольший периметр имеет правильный n -угольник.

Рассмотрим правильный n -угольник, вписанный в некоторую окружность, и возьмем любую точку A на этой окружности, отличную от его вершин (рис. 289). Соединим точку A с двумя соседними вершинами этого многоугольника и удалим сторону, соединяющую эти вершины. Получим вписанный $(n + 1)$ -угольник, не являющийся правильным, периметр которого больше периметра правильного n -угольника. Следовательно, периметр правильного $(n + 1)$ -угольника тем более больше периметра правильного n -угольника, вписанного в ту же окружность. ▼



$$P_n < P_{n+1}$$

Рис. 289

Таким образом, если обозначить через P_n периметр правильного n -угольника, вписанного в окружность, то $P_3 < P_4 < P_5 < \dots < P_n < \dots$.

С другой стороны, эта последовательность не может неограниченно возрастать. Ведь периметр любого вписанного многоугольника меньше периметра любого описанного многоугольника.

Ограниченность периметров вписанных многоугольников

Объясним этот факт. Если внутри некоторого многоугольника содержится выпуклый многоугольник, то периметр внутреннего многоугольника меньше периметра внешнего. Покажем, почему это

так. Проводя последовательно прямолинейные разрезы, можно из данного многоугольника вырезать любой выпуклый, содержащийся в нем многоугольник (рис. 290). А при каждом разрезе периметр отрезаемой части уменьшается.

Если обозначить через Π периметр любого описанного около этой же окружности многоугольника, то $P_n < \Pi$ при всех n .

Итак, $P_3 < P_4 < \dots < P_n < \dots < \Pi$.

Периметры правильных n -угольников и длина окружности

Таким образом, последовательность периметров правильных вписанных n -угольников является возрастающей и ограниченной. А любая последовательность, обладающая этими двумя свойствами, является *сходящейся*. Это означает, что существует такое число, обозначим его через L , к которому числа P_n по мере возрастания n неограниченно приближаются.

В рассматриваемом случае можно утверждать, что существует число L , большее любого из чисел P_n . Однако какое бы маленькое положительное число ϵ мы ни взяли (маленькие положительные числа в математике часто обозначают греческой буквой ϵ — «эпсилон»), например $\epsilon = 0,01, 0,001, \dots, 0,0001, \dots$, начиная с некоторого момента, т. е. с некоторого номера N , значения P_n будут отличаться от L не более чем на ϵ . В данном случае это означает, что при всех $n \geq N$ выполняются неравенства $L - \epsilon < P_n < L$ (рис. 291). Все числа P_n , начиная с N , будут располагаться внутри отрезка с концами $L - \epsilon, L$.

Величину L мы и примем за длину окружности. Напомним, что π — это отношение длины окружности к ее диаметру, т. е. $L = \pi R$.

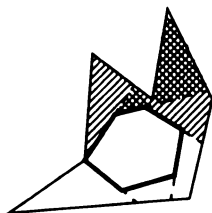


Рис. 290

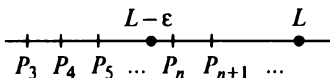


Рис. 291

Оценка разности периметров описанных и вписанных n -угольников

Осталось ответить еще на один вопрос: если рассмотреть последовательность правильных описанных n -угольников, то будут ли их периметры стремиться к той же величине L ?

Можно доказать, что, в отличие от периметров вписанных многоугольников, периметры правильных описанных многоугольников монотонно уменьшаются и ограничены снизу. Из этого можно заключить, что они также стремятся к некоторой величине, а затем уже доказывать совпадение предельных величин для вписанных и описанных окружностей. Мы же поступим иначе и докажем теорему, из которой следует, что при больших n разность периметров описанных и вписанных n -угольников становится сколь угодно маленькой.

Теорема 10.3.

Если P_n — периметр правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса 1, а Π_n — периметр описанного около этой окружности правильного n -угольника, то $0 < \Pi_n - P_n < \frac{100}{n^2}$.

Доказательство. Пусть A и B — две соседние вершины правильного вписанного n -угольника (рис. 292). Проведем через A и B касательные и обозначим через C точку их пересечения. Понятно, что AC и CB равны половине стороны правильного описанного n -угольника.

Пусть $AB = 2x$, $AC = CB = y$, O — центр окружности, D — середина AB .

В прямоугольном треугольнике OAC с прямым углом при вершине A известен катет $OA = 1$ и высота $AD = OD$, опущенная на гипотенузу. Найдем катет $AC = y$. По теореме Пифагора из треугольника OAD находим

$$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Из подобия треугольников ACD и OAD имеем

$$\frac{AC}{AD} = \frac{OA}{OD}, \text{ или } \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Таким образом, $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

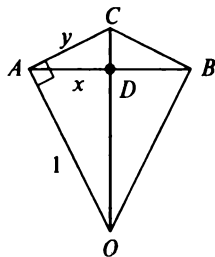


Рис. 292

А теперь рассмотрим разность $\Pi_n - P_n$. Поскольку x и y — половины сторон соответствующих n -угольников, имеем

$$\begin{aligned}\Pi_n - P_n &= 2n(y - x) = 2nx \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right) = 2nx \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= 2nx \frac{(1 - \sqrt{1-x^2})(1 + \sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(1 + \sqrt{1-x^2})} = 2nx \frac{1 - (1-x^2)}{\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2} = \\ &= \frac{2nx^3}{\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2}.\end{aligned}$$

Так как x — половина стороны правильного вписанного n -угольника, то с ростом n величина x уменьшается, а знаменатель дроби растет. Но уже при $n = 4$ имеем $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и знаменатель больше 1, следовательно,

$$\Pi_n - P_n \leq 2nx^3 \quad \text{при } n \geq 4.$$

Далее заметим, что $2nx$ — периметр правильного вписанного в единичную окружность n -угольника. Значит, $2nx < 2\pi$ и $x < \frac{\pi}{n}$.

Таким образом, окончательно получаем

$$\Pi_n - P_n < 2\pi^3 \frac{1}{n^2} < 2 \cdot (3,2)^3 \cdot \frac{1}{n^2} < \frac{100}{n^2}.$$

Из проведенных рассуждений следует, что это неравенство выполняется при $n \geq 4$; при $n = 3$ его легко проверить непосредственно. (Сделайте это самостоятельно.) ▼

На самом деле указанная разность периметров меньше (примерно втрое) при больших n . Главным является то, что теперь можно сделать важный вывод:

последовательность периметров правильных описанных n -угольников неограниченно приближается к той же самой величине L — длине окружности, что и последовательность периметров правильных вписанных n -угольников.

10.4. Площадь круга и его частей

После того как вы научились вычислять длину окружности, не составит большого труда вывести формулу для вычисления площади круга.

Площадь круга

Рассмотрим круг радиуса R . Опишем около него правильный n -угольник. Если P_n — периметр этого n -угольника, а S_n — площадь, то имеет место равенство

$$S_n = \frac{1}{2} P_n R.$$

При возрастании n , как вы уже знаете, величина P_n убывает и стремится к $L = 2\pi R$ — длине окружности. Последовательность S_n с ростом n также убывает и стремится к величине $S = \pi R^2$, которую мы принимаем равной площади круга (рис. 293). Нетрудно понять, что то же самое значение для площади круга мы получаем, рассматривая последовательность площадей правильных вписанных n -угольников. При этом, если последовательность площадей описанных многоугольников убывающая, то последовательность площадей вписанных многоугольников возрастающая. Итак, площадь круга вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2.$$

Площадь сектора

Рассмотрим теперь сектор, соответствующий центральному углу величиной α (α — радианная мера угла). Если S_α — площадь этого сектора, то имеет место равенство $\frac{S_\alpha}{S_\pi} = \frac{\alpha}{\pi}$ (площади двух секторов относятся как их центральные углы, S_π — площадь полукруга).

Таким образом (рис. 294),

$$S_2 = \frac{\alpha}{2} R^2.$$

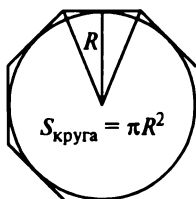


Рис. 293

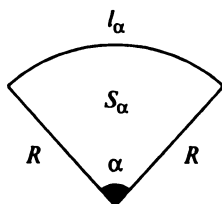


Рис. 294

Если $l_\alpha = \alpha R$ — длина дуги, соответствующей центральному углу α , то

$$S_\alpha = \frac{1}{2} l_\alpha R.$$

Площадь сегмента

Для вычисления площади сегмента (*сегмент* — это часть круга, ограниченная хордой и соответствующей дугой) удобно рассматриваемую площадь представить в виде разности площадей сектора и треугольника (рис. 295). В результате для площади Q_α сегмента, дуге которого соответствует центральный угол α , получим следующую формулу:

$$Q_\alpha = \frac{1}{2} R^2 \alpha - \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha = \frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha).$$

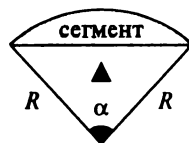


Рис. 295

(Кстати, из этой формулы следует, что при всех α имеет место неравенство $\sin \alpha < \alpha$.)

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

1. Запишите в порядке возрастания следующие величины: площадь круга радиуса 1, площади правильных шести- и двенадцатиугольников, вписанных и описанных по отношению к этому кругу.
2. Какая из фигур имеет бóльшую площадь и на сколько: круг, ограниченный окружностью, длина которой равна 1, или квадрат с периметром 1?
3. Найдите сторону правильного шестиугольника, равновеликого кругу радиуса 3.
4. В круге радиуса 1 проведена хорда длиной 1. Пусть S — площадь наименьшего из получившихся сегментов. Чему равен центральный угол сектора, имеющего площадь S ?
- 5(п). Найдите площадь общей части двух кругов с радиусами 1 и $\sqrt{3}$, расстояние между центрами которых равно 2.

- 6(т). В круге радиуса 1 проведены две непересекающиеся хорды длиной $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Они разделили круг на 3 части. При этом площадь наибольшей части больше, чем 2,3. Найдите площадь наименьшей части.
7. Найдите площадь общей части четырех единичных кругов, центры которых находятся в вершинах единичного квадрата.
- 8(т). В треугольнике ABC угол B равен 140° , высота к стороне AC равна 1. Рассмотрим круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке B . Найдите площадь общей части треугольника ABC и круга.
- 9(п). На плоскости дан отрезок AB и прямая l , перпендикулярная AB . Пусть M — произвольная точка на l . Докажите, что площадь фигуры, заштрихованной AB при вращении вокруг M , не зависит от положения точки M .
10. Докажите, что площадь арбелоса Архимеда может быть вычислена по формуле $\frac{1}{4}\pi CD^2$ (рис. 296).
- 11(т). Вершины правильного шестиугольника со стороной 2 служат центрами кругов радиусом $\sqrt{2}$. Найдите площадь части шестиугольника, расположенной вне этих кругов.

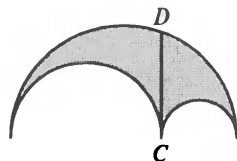
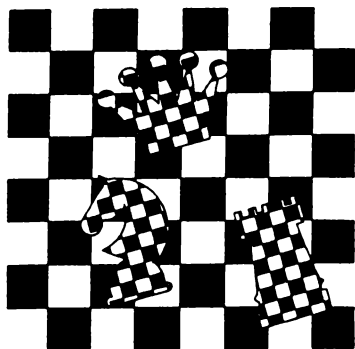


Рис. 296

12. Докажите, что при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $\alpha < \operatorname{tg} \alpha$.
13. Возможно ли, чтобы сумма радиусов некоторого числа кругов была больше 100, а сумма их площадей меньше 0,01?
14. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой и следуют друг за другом в указанном порядке, причем $AD = a$, $BC = b$. Найдите площадь фигуры, ограниченной полуокружностями с диаметрами AB, AC, BD и CD , при этом первые две полуокружности расположены по одну сторону от прямой AD , а две последние — по другую сторону.
- 15(т). Докажите неравенство

$$2500\pi - 100 < \sqrt{1 \cdot 199} + \sqrt{2 \cdot 198} + \dots + \sqrt{99 \cdot 101} < 2500\pi.$$

Координаты и векторы



Координатный метод, возникновение которого обычно связывают с именем великого французского математика и философа Рене Декарта, жившего в первой половине XVII в., произвел настоящий переворот в геометрии и не только в ней. Сегодня в любой естественной или технической науке, в теоретических и практических исследованиях очень широко используются координаты.

Метод координат дает универсальный способ поставить в соответствие геометрическим объектам — фигурам, линиям и т. д. те или иные алгебраические выражения или соотношения. Иначе, метод координат — это способ перевода с геометрического языка на язык алгебры, после чего геометрические проблемы превращаются в

алгебраические, и мы получаем возможность использовать для решения геометрических задач алгебраические методы.

11.1. Декартовы координаты на плоскости

Ось

Рассмотрим две взаимно перпендикулярные прямые на плоскости. Обозначим через O точку пересечения этих прямых и будем считать, что каждая из них является числовой осью или *осью координат* с началом в точке O и равными единичными отрезками. При этом одну из этих прямых будем считать первой и назовем *осью иксов* или *осью абсцисс*, а вторую прямую — *осью игреков* или *осью ординат* (рис. 297).

Такая пара перпендикулярных прямых задает на плоскости *декартову систему координат*.

Теперь по достаточно простому правилу каждой точке плоскости можно поставить в соответствие пару чисел, а вернее, упорядоченную пару чисел — координаты этой точки.

Пусть A — произвольная точка плоскости, A_1 — проекция A на ось абсцисс, A_2 — проекция A на ось ординат. Первая координата точки A , или абсцисса точки A (будем обозначать ее буквой x), является положительной, если A_1 лежит на положительной полуоси оси абсцисс, и отрицательной — в противоположном случае. Абсолютная величина абсциссы равна длине отрезка OA_1 . Аналогично точка A_2 задает вторую координату — ординату точки A (будем обозначать ее буквой y) (рис. 298).

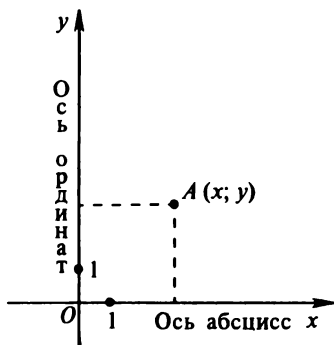


Рис. 297

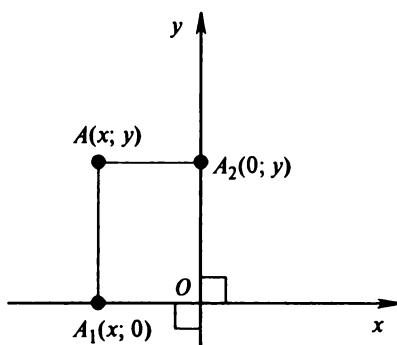


Рис. 298

Тот факт, что x и y — соответственно абсцисса и ордината точки A , будем записывать следующим образом: $A(x; y)$. Понятно, что точке O соответствуют две нулевые координаты: $O(0; 0)$.

Введя таким образом координаты на плоскости, мы установили взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами чисел. Выражение «взаимно однозначное соответствие» в данном случае означает, что каждой точке плоскости соответствует пара чисел, а каждой паре чисел — точка плоскости. При этом важно, в каком порядке записаны эти числа. Так, точка $M(2; 3)$ и точка $K(3; 2)$ — различные точки плоскости. Именно этот факт обозначает прилагательное «упорядоченная».

Для всех точек оси абсцисс ордината равна нулю, а для точек оси ординат нулю равна абсцисса.

Формула расстояния между двумя точками

Пусть A и B — две точки плоскости, координаты которых в декартовой системе координат таковы: $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, тогда

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Указанная формула, по существу, является теоремой Пифагора, записанной в координатной форме. В самом деле, пусть A_1 и B_1 — соответственно проекции точек A и B на ось абсцисс, M — проекция A на прямую BB_1 (рис. 299).

Имеем: AB — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами AM и BM . Но $AM = A_1B_1 = |x_2 - x_1|$. Точно так же $BM = |y_2 - y_1|$.

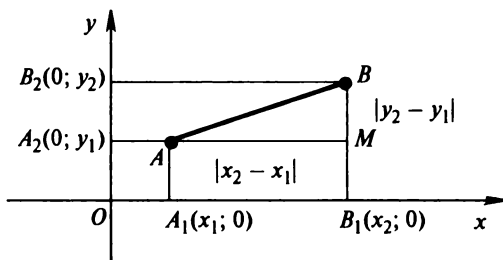


Рис. 299

Следовательно,

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

и формула доказана.

▲■● Задачи, задания, вопросы

1. Постройте в данной декартовой системе координат точки $A(2; 7)$; $B(-2; 7)$; $C(-7; 2)$; $D(-7; -2)$.
2. Найдите расстояние между точками A и B , если:

а) $A(1; 7)$, $B(-2; 4)$;	б) $A(1, 2; 2, 1)$, $B(1, 1; -1, 9)$;
в) $A(3; 0)$, $B(0; 4)$;	г) $A(0, 17; -0, 04)$, $B(0, 05; 0, 01)$.
- 3(в). Укажите все точки $A(x; y)$ координатной плоскости, для которых:

а) $x \geq 0$, $y < 0$;	б) $x > 1$, $y \leq -1$;
в) $x = 1$;	г) $xy + 1 = x + y$; д) $x^2 + y^2 \leq 1$.
4. Найдите все точки оси абсцисс, удаленные на расстояние, равное 5, от точки $A(14; 3)$.
5. Рассмотрим на координатной плоскости точки $A(-2; 5)$ и $B(4; -3)$. Найдите координаты точки M , если:

а) M — середина AB ;	б) M — точка на отрезке AB такая, что $AM : MB = 1 : 2$;
в) M точка на прямой AB такая, что $AM : MB = 1 : 2$;	г) $AM = MB = 10$;
д) $AM^2 + BM^2 = 50$.	

11.2. Уравнение линии

Окружность и прямая на координатной плоскости

Всякое уравнение, связывающее между собой x и y , задает на координатной плоскости, как правило, линию. Так, например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает такие точки плоскости, для которых расстояние до начала координат равно 1. Ведь $x^2 + y^2$ — это квадрат расстояния от точки $M(x, y)$ до начала координат — точки $O(0; 0)$. Следовательно,

$x^2 + y^2 = 1$ — это уравнение окружности единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 300).

В первой фразе параграфа мы употребили выражение «как правило». Это значит, что наше утверждение допускает исключения. Например, уравнение $(x - 1)^2 + |y + 2| = 0$ определяет одну точку $M(1; -2)$, а уравнение $x^2 + y^2 - 2y + 3 = 0$ вообще не имеет решений и задает на координатной плоскости пустое множество. Можно придумать уравнения, которым соответствует полуплоскость или угол. Возможны и другие исключения, но еще раз подчеркнем, как правило, каждому уравнению соответствует на координатной плоскости некоторая линия.

Здесь обычно возникают две взаимно обратные задачи.

1. По заданному уравнению, связывающему x и y , построить соответствующую линию. С подобными задачами вы часто имеете дело на уроках алгебры. К ним относятся такие типичные алгебраические задачи, как задачи на построение графиков функций.

2. Найти уравнение, задающее данную линию плоскости. С такими проблемами мы сталкиваемся в тех случаях, когда хотим использовать метод координат для решения той или иной геометрической задачи.

Мы, по существу, имеем дело лишь с двумя плоскими линиями: прямой и окружностью, поэтому нас будут интересовать уравнения, задающие именно эти линии.

Уравнение окружности

Определение окружности, данное в § 2.4, легко переводится на координатный язык.

Пусть точка Q — центр окружности (привычной буквой O мы обозначили начало координат) имеет координаты $(a; b)$, R — радиус окружности, $M(x; y)$ — некоторая точка на окружности (рис. 301). По определению окружности $QM = R$.

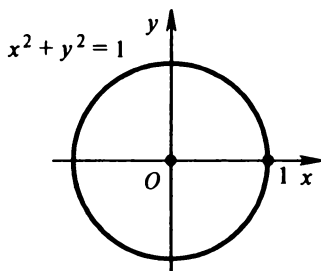


Рис. 300

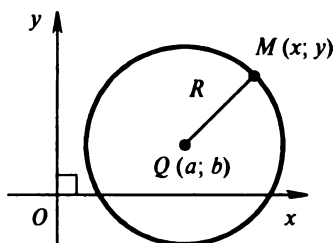


Рис. 301

Теперь остается выразить MQ по известной формуле через координаты точек M и Q и возвести равенство в квадрат. В результате имеем

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Получившееся уравнение и является уравнением окружности с центром в точке $Q(a; b)$ и радиусом R . Координаты любой точки $M(x; y)$ окружности удовлетворяют этому уравнению, а любая точка $M(x; y)$, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, лежит на окружности.

При решении геометрических задач координатным методом в большинстве случаев не ограничиваются первым этапом — переводом на алгебраический язык и решением алгебраической задачи. Мы должны также суметь дать геометрическое толкование полученному алгебраическому результату, в частности, «увидеть» в получившемся соотношении уравнение окружности и в том случае, когда это уравнение записано в нестандартном виде.

Следует запомнить, что уравнение

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

задает либо окружность, либо точку, либо пустое множество. Чтобы ответить на вопрос, какой именно случай имеет место для данного конкретного уравнения, надо выделить полные квадраты по x и y . С этим приемом вы уже встречались на уроках алгебры при изучении квадратного трехчлена.

Например, уравнение $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ можно преобразовать так:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) - 5 = 0, \quad (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5.$$

Таким образом, рассматриваемое уравнение задает окружность с центром в точке $Q(2; -1)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

Уравнение прямой, проходящей через начало координат

Выведем теперь уравнение прямой линии. Начнем со случая прямой, проходящей через начало координат.

Пусть угол, образованный рассматриваемой прямой с положительным направлением оси абсцисс, равен α , причем он измеряется против движения часовой стрелки (рис. 302). Так что величина α изменяется от 0° до 180° , при этом мы исключаем из рассмотрения

случай, когда прямая перпендикулярна оси абсцисс, т. е. совпадает с осью ординат. Положим $k = \operatorname{tg} \alpha$. Величина k положительна, когда прямая проходит в I и III четвертях, и отрицательна, если эта прямая проходит во II и IV четвертях.

Величина k называется угловым коэффициентом прямой.

Пусть $M(k; y)$ — некоторая точка прямой. По определению тангенса $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, или

$$y = kx.$$

Полученное соотношение является уравнением прямой, проходящей через начало координат. В таком виде можно записать уравнение любой прямой, кроме прямой, перпендикулярной оси абсцисс, т. е. оси ординат. Ось ординат имеет уравнение $x = 0$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим теперь произвольную прямую l , не перпендикулярную оси абсцисс. Пусть эта прямая пересекает ось ординат в точке $P(0; b)$ (рис. 303). Проведем через начало координат параллельную ей прямую l_1 . Рассмотрим две точки $M(x; y)$ и $M_1(x; y_1)$ с одинаковой абсциссой x , лежащих соответственно на прямых l и l_1 .

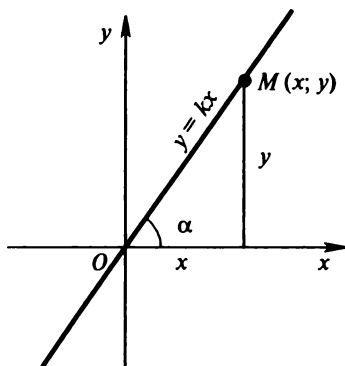


Рис. 302

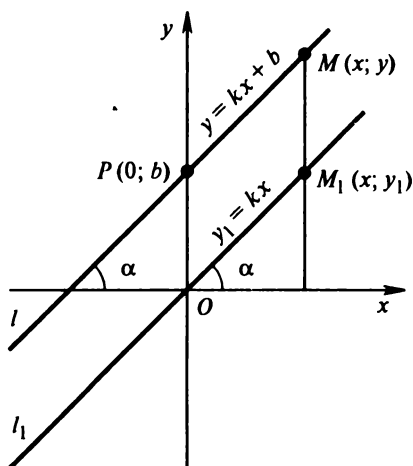


Рис. 303

Как вы знаете, $y_1 = kx$, где k — угловой коэффициент прямой l_1 (а также l). Четырехугольник $OPMM_1$ является параллелограммом. Следовательно, ордината точки M получается из ординаты точки M_1 так же, как ордината точки P получается из ординаты точки O — прибавлением b , т. е. $y = y_1 + b$. Таким образом, уравнение прямой l имеет вид

$$y = kx + b.$$

В таком виде можно записать уравнение любой прямой, за исключением прямых, перпендикулярных оси абсцисс. Если прямая перпендикулярна оси абсцисс, то все ее точки имеют одну и ту же координату x и ее уравнение имеет вид $x = a$.

Еще раз напомним геометрический смысл параметров k и b , входящих в полученное уравнение прямой:

k — угловой коэффициент прямой, равный тангенсу угла, образованного прямой с положительным направлением оси абсцисс (угол измеряется против часовой стрелки);

b — ордината точки пересечения данной прямой с осью ординат.

Общее уравнение прямой

Можно сделать вывод, что любое уравнение первой степени, т. е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0,$$

в котором A и B не равны нулю одновременно, представляет собой уравнение прямой линии (рис. 304). При этом если $B \neq 0$, то, выра-



Рис. 304

зив y через x , можно это уравнение привести к виду $y = \frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, или $y = kx + b$, т. е. к уравнению с угловым коэффициентом. Если же $B = 0$, то получаем, что уравнение прямой, перпендикулярной оси абсцисс, имеет вид $x = -\frac{C}{A}$.

▲■● Задачи, задания, вопросы

1(в). Напишите уравнение окружности, если дан ее центр – точка Q и точка A на окружности:

а) $Q(-1; 2)$, $A(0; 5)$; б) $Q(2; 0)$, $A(-1; -2)$; в) $Q(1; -2)$, $A(-1; 2)$.

2(в). Найдите уравнение прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой l , если:

а) $A(2; -3)$, уравнение прямой l имеет вид $y = 2x - 5$;

б) $A(1; 1)$, уравнение прямой l имеет вид $y = -3x + 1$;

в) $A(3; 0)$, уравнение прямой l имеет вид $3x - 2y = 0$.

3(п). Точка M принадлежит линии, задаваемой уравнением I, а точка K принадлежит линии, задаваемой уравнением II. Найдите наибольшее и наименьшее значения расстояния между точками M и K , если уравнения I и II имеют вид:

I

II

а) $x^2 + y^2 = 5$,

$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 1$;

б) $x^2 + y^2 - 2x = 0$,

$x^2 - 3x + y^2 + y = 100$;

в) $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$,

$x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0$;

г) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$,

$x^2 + y^2 - 3x + y - 5 = 0$.

4(в). Определите вид линии, задаваемой уравнением:

а) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 3x - 5y - 7 = 0$; г) $y - 1 = \sqrt{5 - x^2}$;

д) $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 5x^2 - 5y^2 + 4 = 0$.

5. Найдите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB , если точка A имеет координаты $(-2; 3)$, а координаты точки $B(1; -4)$.

6(п). Даны точки $A(1; 2)$ и $B(3; 0)$. Найдите геометрическое место точек M таких, что:

а) $AM^2 + BM^2 = 2AB^2$; б) $AM^2 - BM^2 = AB^2$;

в) $AM = 2BM$; г) $AM^2 + BM^2 - AM \cdot BM = AB^2$.

7(п). Докажите, что если k_1 и k_2 — угловые коэффициенты двух прямых, не параллельных осям координат, то условие их перпендикулярности задается равенством $k_1 \cdot k_2 = -1$.

8(п). Найдите уравнение прямой, которая проходит через точки A и B , если:

а) $A(2; -1)$, $B(-2; 1)$; б) $A(3; 0)$, $B(0; 4)$; в) $A(4; 3)$, $B(3; 2)$.

9. Найдите расстояние от точки A до прямой l , если:

а) $A(0; 0)$, $l: y = x + 1$;

б) $A(1; 4)$, $l: y = 3x - 2$;

в) $A(-2; -1)$, $l: 2x + 3y + 1 = 0$.

11.3. Векторы на плоскости

Определение вектора

Рассмотрим на плоскости две точки A и B . Обозначим через \overrightarrow{AB} вектор AB , понимая под этим направленный отрезок AB , т. е. отрезок, у которого точка A является *началом*, а точка B — *концом* (рис. 305).

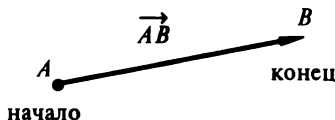


Рис. 305

Таким образом, точки A и B , ограничивающие вектор \overrightarrow{AB} , играют различную роль. Именно в этом, в первую очередь, и состоит главное различие между вектором \overrightarrow{AB} и отрезком AB .

Две точки A и B плоскости задают два различных вектора \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BA} одинаковой длины и противоположно направленные.

Равенство двух векторов

Два вектора \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} , расположенные на одной прямой, считаются равными, если равны отрезки AB и CD , т. е. равны длины этих векторов, а лучи AB и CD задают одинаковые направления.

Если же векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} не расположены на одной прямой, то они считаются равными, если четырехугольник $ABDC$ (вершины рассматриваются в данном порядке) является параллелограммом (рис. 306).

Таким образом, мы можем вектор не только перемещать вдоль соответствующей прямой, но и переносить его начало в любую точку плоскости. Следовательно, для обозначения вектора нет необходимости указывать его начало и конец, и можно использовать обозначения вида \vec{a} , \vec{b} , \vec{l} и т. п., помещая в случае необходимости начало соответствующего вектора в удобную точку плоскости.

Для длины вектора \vec{a} будем использовать обозначение $|\vec{a}|$ — читается: «длина вектора \vec{a} » или «**модуль** вектора \vec{a} » (рис. 307).

Нулевым называется вектор, длина которого равна нулю (его начало и конец совпадают). Обозначается нулевой вектор $\vec{0}$ (или просто 0).

Если два вектора \vec{a} и \vec{b} можно расположить вдоль одной прямой, то эти векторы будем называть **коллинеарными**, т. е. лежащими на одной прямой.

Нулевой вектор мы считаем коллинеарным любому вектору.

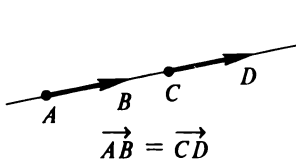


Рис. 306

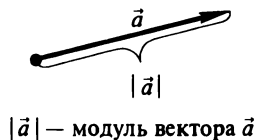
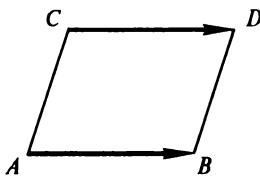


Рис. 307

Умножение вектора на число

Для любого вектора \vec{a} и любого числа k определим вектор $\vec{b} = k\vec{a}$, являющийся произведением вектора \vec{a} на число k , с помощью следующего простого правила:

вектор \vec{b} коллинеарен вектору \vec{a} , причем его направление совпадает с направлением \vec{a} , если $k > 0$, и противоположно, если $k < 0$, $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

(Понятно, что если $k = 0$, то получаем нулевой вектор, т. е. точку.) Таким образом, длина вектора \vec{b} в $|k|$ раз больше длины вектора \vec{a} . Если $k = -1$, то получаем вектор $-\vec{a}$, равный по длине вектору \vec{a} , но противоположно направленный (рис. 308). В частности, это означает, что $-\vec{AB} = \vec{BA}$.

Сложение векторов

Суммой двух векторов \vec{a} и \vec{b} будем называть вектор \vec{c} , полученный по следующему правилу:

расположим векторы \vec{a} и \vec{b} так, чтобы начало вектора \vec{b} совпадало с концом вектора \vec{a} (рис. 309); тогда началом вектора \vec{c} будет начало вектора \vec{a} , а его концом — конец вектора \vec{b} .

Из определения сложения следует, что для любых A, B и C имеет место равенство

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

Правило сложения двух неколлинеарных векторов можно сформулировать иначе, в виде *правила параллелограмма*:

пусть начала векторов \vec{a} и \vec{b} совпадают; рассмотрим параллелограмм, у которого эти векторы являются соседними сторонами; тогда суммой векторов \vec{a} и \vec{b} является вектор \vec{c} — диагональ этого

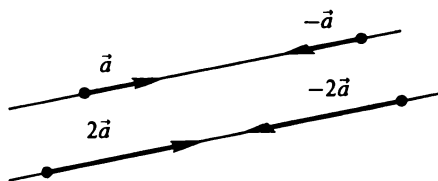


Рис. 308

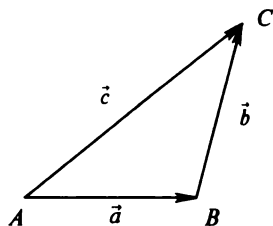


Рис. 309

параллелограмма, с началом в общей для векторов \vec{a} и \vec{b} точке (рис. 310).

Понятно, что из определения суммы векторов следует равенство

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Вычесть из \vec{a} вектор \vec{b} — это значит прибавить к \vec{a} вектор, противоположный \vec{b} , т. е.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Неравенство треугольника в векторной форме записывается следующим образом:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

При этом равенство имеет место лишь для коллинеарных и одинаково направленных векторов.

Координаты вектора

Пусть A и B — две точки координатной плоскости. Их координаты соответственно $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Тогда координаты вектора \overrightarrow{AB} таковы: $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Они получаются вычитанием из координат конца вектора координат его начала (рис. 311).

Понятно, что в какой бы точке плоскости мы ни поместили начало вектора, его координаты будут одними и теми же.

При умножении вектора на число его координаты соответственно умножаются на это число, т. е. если вектор \vec{a} имел координаты $(\alpha; \beta)$, то координатами вектора $k\vec{a}$ будут $(k\alpha; k\beta)$.

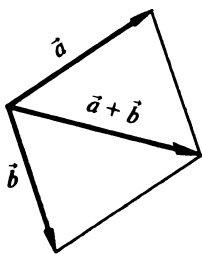


Рис. 310

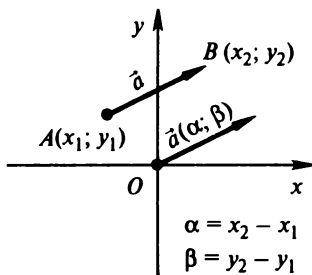


Рис. 311

При сложении векторов их координаты соответственно складываются, т. е. если векторы \vec{a} и \vec{b} имели соответственно координаты $(\alpha_1; \beta_1)$ и $(\alpha_2; \beta_2)$, то координатами вектора $\vec{a} + \vec{b}$ являются $(\alpha_1 + \alpha_2; \beta_1 + \beta_2)$.

Теорема о единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам

Теорема 11.1.

Пусть \vec{a} и \vec{b} — два неколлинеарных вектора плоскости. Тогда для любого вектора \vec{m} плоскости существует, и притом единственная, пара чисел x и y такая, что

$$\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Доказательство. Пусть A и B — соответственно начало и конец вектора \vec{m} , т. е. $\vec{m} = \overrightarrow{AB}$. Проведем через точку A прямую, параллельную вектору \vec{a} , а через точку B — прямую, параллельную вектору \vec{b} (рис. 312). Обозначим через C точку пересечения этих прямых.

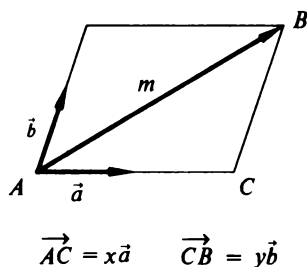


Рис. 312

Имеем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Но вектор \overrightarrow{AC} коллинеарен вектору \vec{a} . Значит, $\overrightarrow{AC} = x\vec{a}$. Точно так же из коллинеарности вектора \overrightarrow{CB} вектору \vec{b} следует, что $\overrightarrow{CB} = y\vec{b}$. Таким образом, $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Итак, мы доказали, что такая пара чисел x и y существует. Теперь докажем, что она единственна.

Предположим, что существует еще одна пара чисел x_1 и y_1 такая, что $\vec{m} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$.

Имеем

$$x\vec{a} + y\vec{b} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b},$$

откуда

$$(x - x_1)\vec{a} = (y_1 - y)\vec{b}.$$

Но последнее равенство возможно лишь при условии, что $x = x_1$, $y = y_1$. Если, например, $x \neq x_1$, то можно выразить вектор \vec{a} через \vec{b} : $\vec{a} = k\vec{b}$. А это означает коллинеарность векторов \vec{a} и \vec{b} . ▼

Замечание. Рассмотрим декартову систему координат. Обозначим через \vec{i} и \vec{j} единичные векторы, направленные по осям координат. Представим вектор \vec{m} в виде $\vec{m} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Коэффициенты x и y в данном случае являются координатами вектора \vec{m} в этой системе координат (рис. 313)

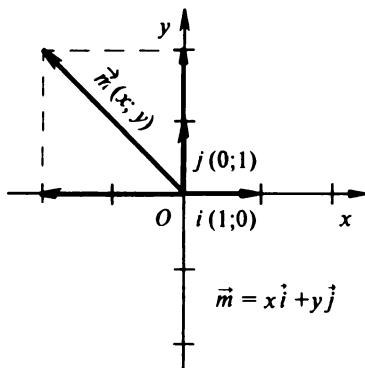


Рис. 313

▲■● Задачи, задания, вопросы

1(в). Даны два вектора $\vec{a}(3; -2)$ и $\vec{b}(1; 2)$. Найдите координаты векторов $2\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$, $\frac{\vec{a} - 3\vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|}$.

2(в). На координатной плоскости заданы точки $A(-1; 3)$, $B(2; -5)$, $C(3; 4)$. Найдите координаты следующих векторов $\vec{AB} - \vec{BC}$, $\vec{AB} + \vec{CB} + \vec{AC}$, $\vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} + \frac{1}{3} \vec{CA}$.

3. Найдите координаты вектора единичной длины, коллинеарного прямой $3x - 2y + 1 = 0$.

4(п). Дан правильный пятиугольник. Докажите, что сумма пяти векторов с началом в центре этого пятиугольника и с концами в его вершинах равна нулю.

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Найдите $\vec{AC} + \vec{BD} - 2\vec{AD}$.

6(п). Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что $\vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

7(п). Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

Докажите, что $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$. Докажите также, что если имеет место равенство $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$, то M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

8(п). Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника на плоскости. Докажите, что если $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = 0$, то точки пересечения медиан этих треугольников совпадают.

9(п). Докажите, что для любых a, b, x и y имеет место неравенство $\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$.

10(т). Найдите все точки $M(x, y)$, для которых имеет место равенство $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2} = 5$.

11. Пусть A, B, C и D — данные точки. Найдите точку M такую, что $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{CD}$.

12(т). В треугольнике ABC точка O является центром описанной окружности; H — точка пересечения высот. Докажите, что $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$.

13(т). Из точки M внутри треугольника ABC выходят три луча, перпендикулярные его сторонам. На луче, перпендикулярном стороне AB , взята точка C_1 так, что $MC_1 = AB$. Точно так же на двух других лучах взяты точки A_1 и B_1 ($MA_1 \perp BC$, $MA_1 = BC$, $MB_1 \perp AC$, $MB_1 = AC$). Докажите, что

$$\vec{MA_1} + \vec{MB_1} + \vec{MC_1} = 0.$$

11.4. Скалярное произведение векторов

Две операции над векторами — умножение на число и сложение, с которыми вы познакомились в предыдущем параграфе, в результате вновь дают вектор. Сейчас мы расскажем еще об одной опера-

ции, ставящей в соответствие любым двум векторам число. Речь пойдет о **скалярном произведении**. Скалярной в математике называют величину, задаваемую, в отличие от вектора, одним числом. Слова *скаляр* и *шкала* родственны по происхождению (scalaris (лат.) — ступенчатый).

Определение скалярного произведения

Будем через $\vec{a} \cdot \vec{b}$ обозначать скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} и определим его равенством

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi,$$

где φ — угол между векторами \vec{a} и \vec{b} (рис. 314).

Из определения скалярного произведения непосредственно следует, что

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|,$$

причем равенство имеет место лишь в случае, когда \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

Скалярное произведение двух перпендикулярных векторов равно нулю. И наоборот, из равенства $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ следует перпендикулярность векторов \vec{a} и \vec{b} . (Чтобы не оговаривать исключения, нулевой вектор считаем перпендикулярным любому другому вектору.)

Произведение вектора само на себя есть скалярный квадрат вектора:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2.$$

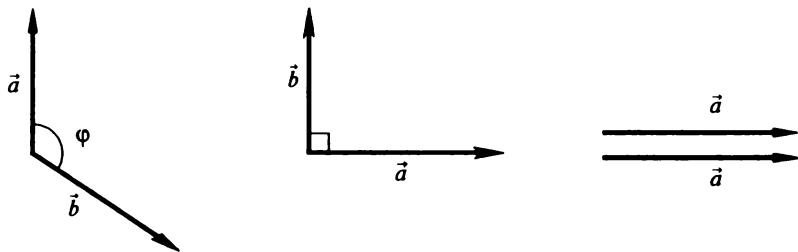


Рис. 314

Свойства скалярного произведения

Из определения скалярного произведения следует *свойство перестановочности или коммутативности скалярного произведения*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Далеко не так очевидно следующее *свойство скалярного произведения (распределительный закон)*.

Теорема 11.2.

Для любых трех векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} имеет место равенство

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Доказательство. Рассмотрим декартову систему координат, в которой ось абсцисс направлена по вектору \vec{a} , т. е. вектор \vec{a} имеет в этой системе координаты $(|\vec{a}|, 0)$ (рис. 315).

Пусть в этой системе векторы \vec{b} и \vec{c} имеют соответственно координаты $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.

Заметим, что если какой-либо вектор \vec{m} в этой системе имеет координаты $(x; y)$, то $x = |\vec{m}| \cos \varphi$, где φ — угол между \vec{a} и \vec{m} , т. е.

$$\vec{a} \cdot \vec{m} = |\vec{a}| \cdot |\vec{m}| \cos \varphi = |\vec{a}| \cdot x,$$

следовательно,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot x_1, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot x_2.$$

А так как абсцисса вектора $\vec{b} + \vec{c}$ в выбранной системе равна $x_1 + x_2$, то аналогично

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (x_1 + x_2).$$

Итак,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot x_1 + |\vec{a}| \cdot x_2 = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \quad \blacktriangledown$$

Из свойств скалярного произведения следует, что при умножении векторов можно использовать те же правила, что и при умножении числовых выражений.

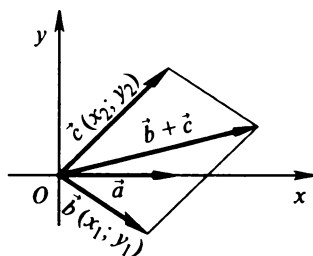


Рис. 315

Запись скалярного произведения в декартовой системе координат

Теорема 11.3.

Пусть в декартовой системе координат векторы \vec{a} и \vec{b} имеют координаты соответственно $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Тогда (рис. 316)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Доказательство. Обозначим через \vec{i} и \vec{j} единичные векторы, направленные по осям координат. Эти векторы перпендикулярны, поэтому $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$. Кроме того,

$$(\vec{i})^2 = (\vec{j})^2 = 1, \quad \vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}, \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}.$$

Учитывая эти равенства, а также только что доказанные свойства скалярного произведения, имеем

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) = \\ &= x_1 x_2 (\vec{i})^2 + y_1 y_2 (\vec{j})^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \cdot (\vec{i} \cdot \vec{j}) = x_1 x_2 + y_1 y_2. \end{aligned}$$

Скалярное произведение и теорема косинусов

Из свойств скалярного произведения непосредственно следует теорема косинусов. В самом деле, рассмотрим треугольник ABC , в котором, как обычно, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Угол между векторами \vec{AB} и \vec{AC} равен α (рис. 317).

Имеем $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ или $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$. Возведем последнее равенство в квадрат: $(\vec{BC})^2 = (\vec{AC})^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}$.

А так как $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = bc \cos \alpha$, то $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

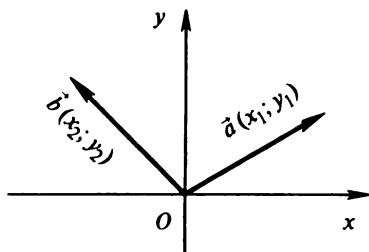


Рис. 316

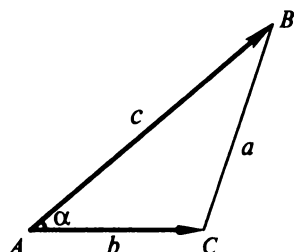


Рис. 317

▲■● Задачи, задания, вопросы

1(в). Чему равен угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если:

а) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} = -6$;

б) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = 6$;

в) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = -4$.

2(в). Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен $\frac{2}{3}\pi$, $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$, $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

3. Докажите равенства:

а) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$;

б) $(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$.

4(в). На координатной плоскости даны четыре точки: $A(1; 2), B(2; 3), C(-1; 4), D(-3; -2)$. Найдите:

а) $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$; б) $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$; в) $\vec{DA} \cdot \vec{CB}$;

г) $(\vec{CB} + \vec{DA}) \cdot (\vec{BD} - \vec{AC})$; д) $(\vec{CA} + \vec{CB}) \cdot (\vec{DA} + \vec{DB})$.

5(п). Найдите координаты вектора единичной длины, перпендикулярного прямой $2x + 3y = 1$.

6(п). Докажите, что вектор $\vec{n}(a, b)$ перпендикулярен прямой $ax + by = c$.

7. Докажите, что

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

8(т). Пусть ABC — равносторонний треугольник со стороной 1. Найдите геометрическое место точек M плоскости, для которых $\vec{AB} \cdot \vec{CM} = 1$.

9(т). Дан треугольник ABC . Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, для которых

$$\vec{AB} \cdot \vec{CM} + \vec{BC} \cdot \vec{AM} + \vec{CA} \cdot \vec{BM} = 0.$$

10(т). Дан квадрат $ABCD$. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, для которых:

а) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$;

б) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$;

в) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = AB^2$.

11(т). Пусть M — произвольная точка окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC . Найдите $MA^2 + MB^2 + MC^2$, если радиус окружности равен R .

11.5. Координатный и векторный методы

Метод координат является одним из самых универсальных методов не только в геометрии и вообще в математике, но и во многих других естественных и технических науках, и все же его значение не следует преувеличивать.

Конечно, очень хотелось бы иметь один или два метода «на все случаи жизни». Однако таких методов нет. Метод координат, например, дает универсальный способ перевода с языка геометрии на язык алгебры, но при этом могут возникать алгебраические задачи, гораздо более трудные, чем исходные геометрические.

Выбор системы координат

Первым и, возможно, самым главным этапом решения геометрической задачи методом координат является разумный выбор системы координат. Необходимо, чтобы выбранная система координат естественным образом была «привязана» к изучаемой геометрической фигуре.

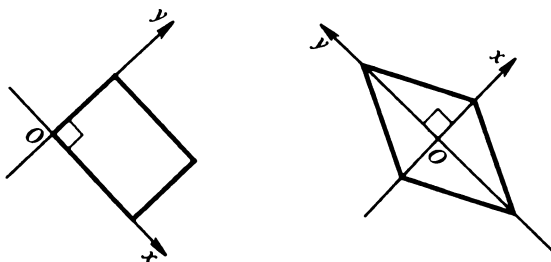


Рис. 318

Есть фигуры, к которым удобно применять координатный метод, своим видом задающие нужную систему координат (рис. 318). Это, например, прямоугольники или ромбы. Другие фигуры «не так удобны». И в первую очередь это фигуры, имеющие произвольный вид, — произвольные треугольники, четырехугольники и др.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Задача 1. Дан квадрат $ABCD$. На его диагоналях AC и BD взяты соответственно точки M и K так, что $CM \cdot BK = AB^2$. Докажите, что прямые BM и CK пересекаются на окружности, описанной около квадрата.

Решение. Квадрат естественным образом задает несколько систем координат. Можно выбрать оси координат либо параллельными его сторонам, либо — диагоналям. Начало координат можно выбрать либо в одной из его вершин, либо — в его центре. Возьмем начало координат в центре квадрата, а оси направим по диагоналям.

Пусть в этой системе координат вершины B и C имеют соответственно координаты $(1; 0)$ и $(0; 1)$, а точки M и K — координаты $(0; u)$ и $(v; 0)$ (рис. 319). Сторона квадрата равна $\sqrt{2}$, и значит, условие $CM \cdot BK = 2$ запишется в виде

$$(1 - u)(1 - v) = 2.$$

Найдем уравнение прямой, проходящей через точки B и M . Вероятно, самый простой (хотя и не самый быстрый) способ нахождения уравнения прямой, проходящей через две данные точки, состоит в том, чтобы записать уравнение прямой $y = kx + b$, подставить в него координаты данных точек, после чего решить получившуюся

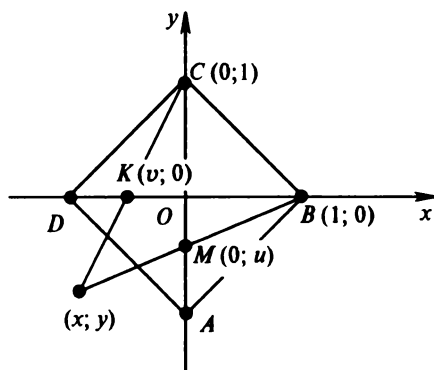


Рис. 319

систему двух уравнений с двумя неизвестными. Неизвестными в ней являются параметры рассматриваемой прямой: угловой коэффициент и свободный член.

В данном случае получаем систему

$$\begin{cases} 0 = k + b, \\ u = b, \end{cases}$$

из которой находим: $b = u$, $k = -u$. Итак, уравнение прямой, проходящей через B и M , имеет вид $y = -ux + u$.

Точно так же найдем уравнение прямой, проходящей через точки C и K . Оно имеет вид $y = -\frac{1}{v}x + 1$.

Теперь найдем координаты точки пересечения прямых BM и CK . Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = -ux + u, \\ y = -\frac{1}{v}x + 1. \end{cases}$$

Находим: $x = \frac{(u-1)v}{uv-1}$, $y = \frac{(v-1)u}{uv-1}$.

Осталось проверить, что точка с найденными координатами действительно лежит на окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 1. При этом мы должны учитывать равенство $(1-u)(1-v) = 2$.

Итак, надо доказать, что

$$\frac{(u-1)^2 v^2}{(uv-1)^2} + \frac{(v-1)^2 u^2}{(uv-1)^2} = 1, \quad \text{если} \quad (1-u)(1-v) = 2.$$

Это чисто алгебраическая задача. Самое простое — выразить u через v : $u = \frac{v+1}{v-1}$, а затем подставить найденное значение в выражение, которое надо доказать. Преобразования можно упростить, если сначала выразить x и y через v . Имеем:

$$x = \frac{\left(\frac{v+1}{v-1} - 1\right)v}{\frac{v+1}{v-1}v - 1} = \frac{2v}{v^2 + 1}, \quad y = \frac{v^2 - 1}{v^2 + 1}.$$

Таким образом,

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2v}{v^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{v^2 - 1}{v^2 + 1}\right)^2 = 1. \blacktriangledown$$

* Окружность Аполлония

Метод координат часто оказывается удобным при решении задач на геометрические места точек. В качестве иллюстрации рассмотрим следующую полезную задачу.

Задача 2. Даны две точки A и B . Докажите, что геометрическим местом точек M таких, что $AM : BM = k$ при $k \neq 1$, является окружность с центром на прямой AB . (Эта окружность называется **окружностью Аполлония**, по имени древнегреческого математика и астронома Аполлония Пёргского, жившего во II–III вв. до н. э.)

Решение. Введем систему координат, в которой точки A и B лежат на оси абсцисс, а начало находится в середине отрезка AB . Пусть в этой системе точки A и B имеют соответственно координаты $(a; 0)$ и $(-a; 0)$. Точка M , принадлежащая искомому геометрическому месту, имеет координаты $(x; y)$ (рис. 320).

По формуле расстояния между двумя точками имеем

$$AM^2 = (x - a)^2 + y^2, \quad BM^2 = (x + a)^2 + y^2.$$

Условие $AM : BM = k$ эквивалентно равенству $AM^2 = k^2 \cdot BM^2$. Заменяя AM^2 и BM^2 их выражениями, получаем уравнение

$$(x - a)^2 + y^2 = k^2(x + a)^2 + k^2y^2$$

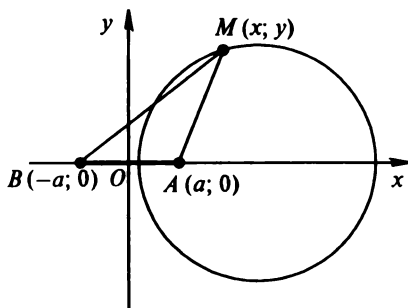


Рис. 320

или

$$(k^2 - 1)(x^2 + y^2) + 2(k^2 + 1)ax + (k^2 - 1)a^2 = 0.$$

Разделив последнее равенство на $(k^2 - 1)$ и выделяя полный квадрат по переменной x , приходим к уравнению

$$\left(x + \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}a\right)^2 + y^2 = a^2 \left(\left(\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 - 1 \right).$$

Это уравнение является уравнением окружности с центром

$\left(-\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}a; 0\right)$ и радиусом

$$R = a \sqrt{\left(\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 - 1} = \frac{2ka}{|k^2 - 1|}.$$

Все преобразования, начиная с уравнения окружности, можно проделать в обратном порядке, поэтому все точки этой окружности принадлежат рассматриваемому геометрическому месту точек. ▼

Заметим, что эта задача может быть решена и по-другому. Проведем в треугольнике AMB биссектрисы внутреннего и внешнего угла, соответствующих вершине M (рис. 321). Пусть эти биссектрисы пересекают прямую AB соответственно в точках M_1 и M_2 . По теореме о биссектрисе (см. § 9.3) $AM_1 : BM_1 = AM_2 : BM_2 = AM : BM = k$. Значит, точки M_1 и M_2 постоянны, одни и те же для любой точки M . Но угол M_1MM_2 равен 90° . Следовательно, точка M лежит на окружности с диаметром M_1M_2 . Остается доказать, что любая точка данной окружности принадлежит этому геометрическому месту, т. е. что для любой точки M окружности с диаметром M_1M_2 выполняется равенство $AM : BM = k$.

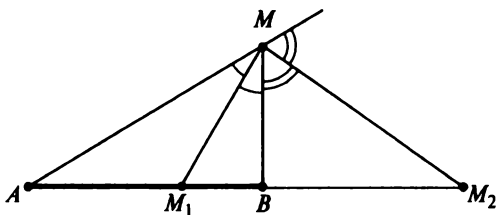


Рис. 321

Как правило, в подобных случаях можно воспользоваться методом «от противного». Предположим, что для какой-то точки M окружности $AM : BM$ не равно k . Пусть, для определенности, $AM : BM > k > 1$ (рис. 322). В треугольнике AMB проведем биссектрисы внутреннего и внешнего угла при вершине M . Пусть эти биссектрисы пересекают прямую AB в точках K_1 и K_2 соответственно.

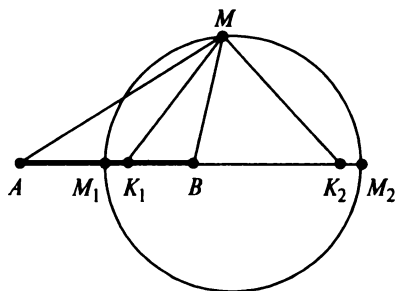


Рис. 322

Для точки M_1 имеет место равенство $AM_1 : BM_1 = k$. А для точки K_1 справедливо неравенство $AK_1 : BK_1 > k$. Значит, $AK_1 > AM_1$.

Точки M_2 и K_2 расположены вне AB , на продолжении за точку B . При этом, в силу неравенства $AK_2 : BK_2 > AM_2 : BM_2 > 1$, точка K_2 ближе к B , чем M_2 . Итак, точки K_1 и K_2 лежат внутри отрезка M_1M_2 . Но этого быть не может, ведь каждый из углов M_1MM_2 и K_1KK_2 равен 90° .

Полученное противоречие доказывает, что любая точка рассматриваемой окружности входит в искомое геометрическое место точек. ▼

Таким образом, преимущество метода координат состоит в данном случае в том, что вопрос, все ли точки найденной окружности принадлежат рассматриваемому геометрическому месту точек, решается сам собой. Но и у геометрического метода есть свои достоинства, не так ли?

Задачи на коллинеарность векторов

Рассмотрим теперь примеры применения векторного метода. Выделим две разновидности этого метода.

Первая разновидность векторного метода. Здесь мы используем свойства коллинеарных векторов, единственность разложения любого вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам.

Задача 3. Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$; M , K , N и L соответственно середины сторон BC , CD , DE и EA . Докажите, что отрезок, соединяющий середины MN и KL , параллелен AB и равен $\frac{1}{4}AB$.

Решение. Заметим, что для любых трех точек O , P и Q имеет место равенство $\vec{OT} = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OQ})$, где T — середина PQ (рис. 323).

Исходя из этого, имеем (рис. 324):

$$\begin{aligned}\vec{AM} &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}), & \vec{AK} &= \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD}), \\ \vec{AN} &= \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{AE}), & \vec{AL} &= \frac{1}{2}\vec{AE}.\end{aligned}$$

Если F и G — середины MN и KL , то

$$\begin{aligned}\vec{AF} &= \frac{1}{2}(\vec{AM} + \vec{AN}) = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE}), \\ \vec{AG} &= \frac{1}{4}(\vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE}).\end{aligned}$$

Таким образом, $\vec{GF} = \vec{AF} - \vec{AG} = \frac{1}{4}\vec{AB}$. ▼

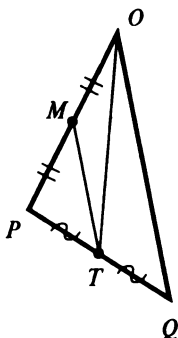


Рис. 323

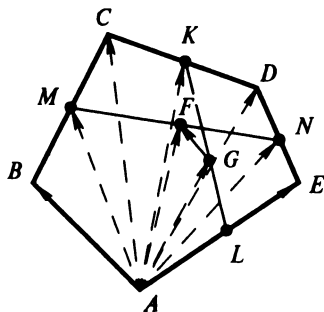


Рис. 324

Задачи, использующие свойства скалярного произведения

Вторая разновидность векторного метода. Здесь мы используем свойства скалярного произведения. Рассмотрим пример.

Задача 4. Пусть A, B и C — углы некоторого треугольника. Докажите, что имеет место неравенство

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Решение. Это неравенство может быть доказано многими различными способами. Воспользуемся одним из наиболее изящных.

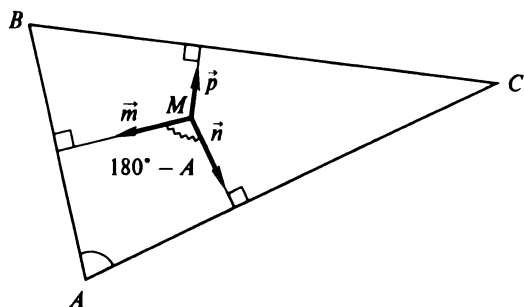


Рис. 325

Возьмем любую точку M внутри треугольника ABC , например центр вписанной окружности, опустим из этой точки перпендикуляры на стороны треугольника и отложим на каждом из перпендикуляров единичные векторы \vec{m} , \vec{n} и \vec{p} (рис. 325). Легко видеть, что углы между этими векторами дополняют до 180° соответствующие углы треугольника ABC . Если, например, угол между \vec{m} и \vec{n} равен $180^\circ - A$, то $\vec{m} \cdot \vec{n} = -\cos A$. Теперь сложим эти векторы и возведем в квадрат. Имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq (\vec{m} + \vec{n} + \vec{p})^2 &= \vec{m}^2 + \vec{n}^2 + \vec{p}^2 + 2\vec{m} \cdot \vec{n} + 2\vec{m} \cdot \vec{p} + 2\vec{n} \cdot \vec{p} = \\ &= 3 - 2 \cos A - 2 \cos B - 2 \cos C. \end{aligned}$$

Отсюда следует требуемое неравенство. ▼

С помощью этого приема можно доказывать интересные неравенства. Ведь вовсе не обязательно рассматривать лишь единичные векторы \vec{m} , \vec{n} и \vec{p} .

* Еще одно доказательство теоремы о высотах треугольника

Используя свойства скалярного произведения, можно дать еще одно (четвертое!) доказательство теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Рассмотрим треугольник ABC . В задаче 9 к § 11.4 было предложено: найти геометрическое место точек M плоскости, для которых имеет место равенство

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

Оказывается, что это последнее равенство выполняется для любой точки плоскости, следовательно, искомое геометрическое место точек состоит из всех точек плоскости. В самом деле, заменяя $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) + \\ + \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) &= \overrightarrow{CM} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) = 0. \end{aligned}$$

Если теперь H — точка пересечения высот, опущенных из вершин C и A , т. е. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$, то и $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$. Таким образом, высота, проведенная из вершины B , также проходит через H .

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

1. На плоскости даны две точки A и B , причем $AB = 2$. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, для которых $AM^2 + BM^2 = 3$.
- 2(п). Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для всех точек M плоскости выполняется равенство $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
3. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны соответственно 1 и 3. Найдите геометрическое место точек M плоскости, для которых $AM^2 + BM^2 = 2CM^2$.

- 4(т). Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке K , а прямые BC и CD в точках P и M соответственно. Найдите AK , если $AP = a$, $AM = b$.
- 5(п). Дана прямая l и точки A и B по одну сторону от нее на расстоянии a и b соответственно. Возьмем в плоскости точку M так, что прямые MA и MB пересекают прямую l . Обозначим через A_1 и B_1 соответствующие точки пересечения. Найдите геометрическое место точек M таких, что $\frac{MA}{MA_1} + \frac{MB}{MB_1} = k$, если:
- а) $a = 3, b = 1, k = 2$; б) $a = 5, b = 1, k = \frac{3}{2}$; в) $a = 5, b = 1, k = 3$.
6. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ взяты точки K и N так, что $3AK = 2BM = AB$. Найдите косинус угла между прямыми DK и AM .
7. Через центр O правильного треугольника ABC проведена прямая; A_1, B_1 и C_1 — проекции вершин A, B и C на эту прямую. Известно, что $OA_1 = 5, OB_1 = 1$. Найдите OC_1 .
8. На плоскости даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек C таких, что медиана к стороне BC в треугольнике ABC равна стороне BC .
- 9(п). Около единичной окружности описан квадрат. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин квадрата.
- 10(т). На плоскости даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек C таких, что в треугольнике ABC медиана к стороне BC равна высоте к стороне AB .
- 11(т). На сторонах прямого угла с вершиной O взяты точки A и B так, что $OA = OB = 1$. Через вершину O проведена произвольная прямая l . Точки A_1 и B_1 симметричны соответственно точкам A и B относительно l . Через A_1 проходит прямая, перпендикулярная OA , а через B_1 — прямая, перпендикулярная OB . Эти прямые пересекаются в точке M . Найдите геометрическое место точек M .
- 12(т). На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся под углом 45° , и на одной из них отмечена точка A . Пусть M_1

и M_2 — две точки, симметричные некоторой точке M относительно данных прямых. Найдите геометрическое место точек M таких, что прямая M_1M_2 проходит через A .

13(т). На прямой взяты две точки A и B . Пусть C — произвольная точка на этой прямой. Построим два квадрата со сторонами AC и BC соответственно, расположенные по одну сторону от этой прямой. Найдите геометрическое место середин всевозможных отрезков, соединяющих центры этих квадратов.

14. Дан квадрат $ABCD$. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости квадрата, для которых $AM + CM = DM + BM$.

15(т). Дан треугольник ABC . Найдите геометрическое место точек M плоскости, для которых существует треугольник со сторонами, равными и параллельными отрезкам MA , MB и MC .

16(т). Через середину диагонали AC четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная BD и пересекающая прямую BC в точке K , а через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная AC и пересекающая прямую AD в точке M . Докажите, что прямая MK параллельна CD .

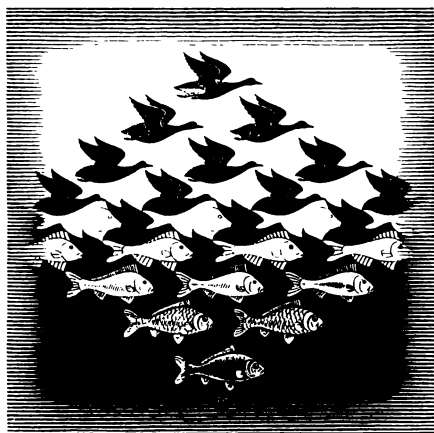
17(п). Пусть A и B — фиксированные точки плоскости, O — произвольная точка плоскости. Докажите, что при изменении x точка M , для которой выполняется равенство $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + (1-x)\overrightarrow{OB}$, описывает прямую AB . Причем при изменении x от 0 до 1 точка M пробегает отрезок AB от B к A , и значение x равно отношению $\frac{BM}{BA}$.

18(т). Найдите геометрическое место центров всевозможных параллелограммов, стороны которых параллельны диагоналям данного четырехугольника, а вершины лежат на его сторонах.

19(т). Пусть A , B и C — величины углов некоторого треугольника. Докажите, что для любых чисел m , n и p имеет место неравенство

$$2mn \cos A + 2np \cos B + 2pm \cos C \leq m^2 + n^2 + p^2.$$

Преобразования плоскости



В этой главе, завершающей теоретическую часть курса, мы рассмотрим одну из важнейших геометрических тем — преобразования плоскости. Точнее, лишь коснемся этой темы, поскольку она далеко выходит за рамки изучаемого вами курса.

Идея преобразований является ведущей идеей современной математики. Ее с успехом используют в самых различных разделах, доказывая удивительные и трудные теоремы. Нас будут интересовать лишь преобразования плоскости, поэтому ограничимся определением понятия преобразования для плоскости.

Будем говорить, что задано преобразование плоскости, если указан способ, с помощью которого каждой точке A плоскости ставится в

соответствие точка A' этой же плоскости. (Это означает, что в результате преобразования точка A переходит в точку A' .) При этом различным точкам A и B соответствуют различные точки A' и B' .

12.1. Движение плоскости

Среди различных видов преобразований плоскости выделим и рассмотрим в первую очередь **движения** плоскости.

Что такое движение плоскости?

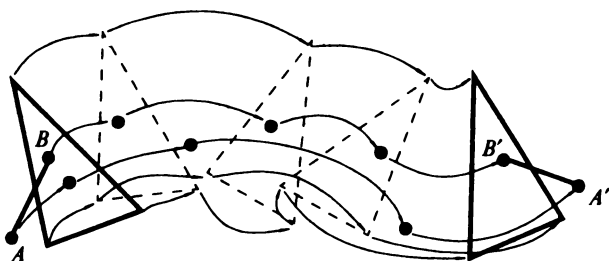


Рис. 326

Возьмем на плоскости какой-нибудь треугольник и начнем его передвигать по плоскости как твердое тело (рис. 326). В результате такого перемещения определенным образом передвинутся и все его внутренние точки, но не только они. Перемещение треугольника задает перемещение любой точки плоскости. Каждую точку плоскости можно рассматривать как бы жестко связанной с данным треугольником. Зная все три расстояния от некоторой точки плоскости до вершин исходного треугольника, мы без труда определим точку, в которую она перейдет в результате перемещения треугольника.

Заметим, что треугольник может не только передвигаться вдоль поверхности плоскости. Он может быть повернут обратной стороной и перемещаться в таком виде. Преобразование, задаваемое таким образом при перемещении треугольника, является движением.

Дадим более четкое определение движения плоскости.

Движением называется такое преобразование плоскости, которое не меняет расстояние между парами точек, т. е. если точки A и B в результате движения переходят в точки A' и B' , то $AB = A'B'$.

Примером движения является рассмотренная нами в начале курса осевая симметрия. Как будет показано в дальнейшем, осевая

симметрия является основным видом движения плоскости и любое движение может быть сведено к нескольким осевым симметриям.

Отметим одно очевидное свойство движения, следующее из определения.

Теорема 12.1.

Результатом двух последовательных движений плоскости является движение плоскости.

Утверждение этой теоремы очевидно. По сути, надо лишь разъяснить ее формулировку.

Пусть в результате первого движения точка A переходит в точку A' , а в результате второго точка A' переходит в точку A'' . Два этих движения можно заменить одним преобразованием, переводящим точку A непосредственно в точку A'' . Различные точки плоскости при этом переходят в различные точки, поэтому мы на самом деле получили преобразование плоскости. Осталось доказать, что построенное таким образом преобразование является движением.

Рассмотрим две различные точки плоскости A и B , переходящие после первого движения соответственно в точки A' и B' . Пусть точки A' и B' в результате второго движения переходят соответственно в точки A'' и B'' . Так как $AB = A'B' = A''B''$, то преобразование, переводящее A и B в A'' и B'' , является движением. (Ведь A и B — две любые точки плоскости.) ▼

Две основные теоремы о движении плоскости

Теорема 12.2.

Любое движение плоскости полностью задается движением трех точек плоскости, не лежащих на одной прямой.

Иными словами, если A , B и C — три не лежащие на одной прямой точки и указаны точки A' , B' и C' , в которые они переходят в результате некоторого движения, то для любой точки M этой плоскости полностью определена точка M' , в которую в результате этого движения переходит точка M .

Доказательство теоремы, по сути дела, уже «намечено» в начале этого параграфа. Сейчас мы его лишь четко оформим. Пусть вершины треугольника ABC в результате движения переходят соответ-

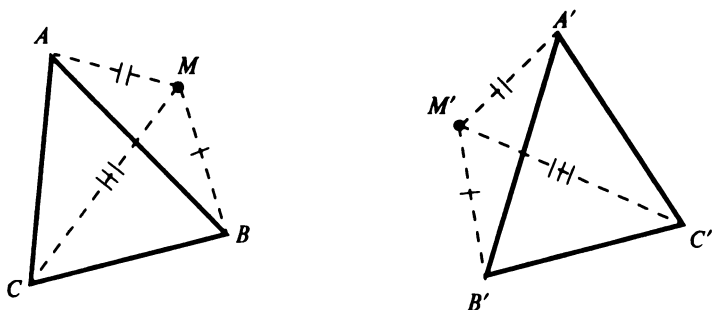


Рис. 327

ственно в точки A' , B' и C' . Треугольник $A'B'C'$ равен треугольнику ABC (рис. 327). Возьмем любую точку M этой плоскости. Пусть при этом движении она переходит в точку M' . Так как $A'M' = AM$, $B'M' = BM$, то M' — одна из точек пересечения окружностей с центрами в A' и B' и радиусами AM и BM . Эти две окружности пересекаются не более чем в двух точках. И для уточнения положения точки M' остается построить еще окружность с центром в C' и радиусом CM . Точка пересечения первых двух окружностей, которая принадлежит и третьей окружности, является нужной нам точкой M' .

Здесь существенным является тот факт, что точки A , B и C , а значит, и A' , B' и C' , не лежат на одной прямой. Три окружности с центрами не на одной прямой имеют не более одной точки пересечения. А хотя бы одну точку пересечения они должны иметь, поскольку точка M' , удаленная от точек A' , B' и C' на заданные расстояния, существует. ▼

Следующая теорема указывает на ведущую роль осевой симметрии среди различных видов движения.

Теорема 12.3.

Любое движение плоскости может быть получено с помощью не более чем трех осевых симметрий.

Доказательство. Достаточно доказать, что с помощью не более чем трех последовательных осевых симметрий можно три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой, перевести в любые такие точки A' , B' и C' , для которых $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$.

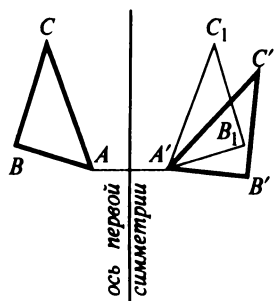


Рис. 328

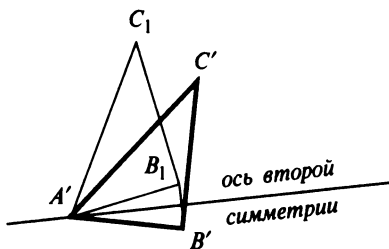


Рис. 329

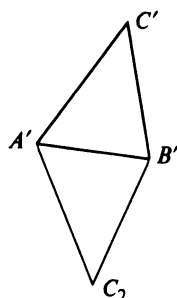


Рис. 330

В качестве первой оси симметрии возьмем серединный перпендикуляр к отрезку AA' . Тогда точка A перейдет в A' (рис. 328). Пусть при этом точка B переходит в B_1 , а точка C — в C_1 . (Если A совпадает с A' , то эта симметрия оказывается ненужной.) В качестве оси второй симметрии возьмем серединный перпендикуляр к $B'B_1$ (рис. 329). Так как $A'B' = AB = A'B_1$, то выбранная ось симметрии содержит точку A' .

Значит, в результате второй симметрии точка A' останется на месте, а точка B_1 перейдет в B' . В результате двух последовательных симметрий точка A переходит в A' , а точка B — в B' . Пусть при этом точка C переходит в C_2 .

Так как $A'C_2 = AC = A'C'$, $B'C_2 = BC = B'C'$, то точка C_2 может занять одно из двух возможных положений: она или совпадает с точкой C' , и тогда третья симметрия оказывается ненужной, или она симметрична точке C' относительно $A'B'$ (рис. 330). В этом случае выполняем симметрию относительно $A'B'$. В результате последовательного применения трех (или меньше) таких симметрий точка A переходит в A' , точка B — в B' , а точка C — в C' . Значит, три эти симметрии задают нужное нам движение плоскости. (Это следует из теоремы 12.2.) ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

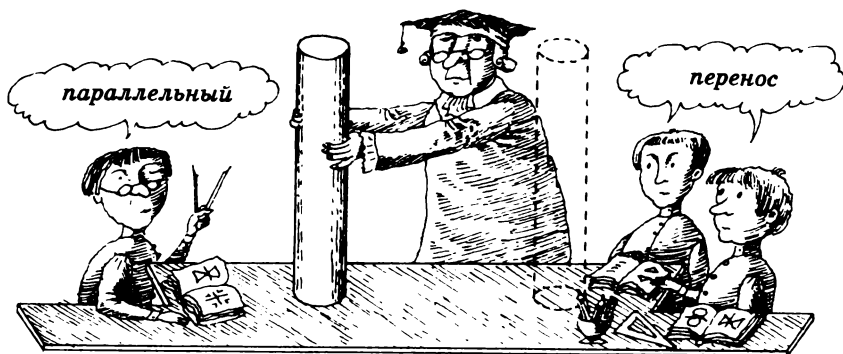
.....

1. Поставим каждой точке плоскости в соответствие проекцию на заданную прямую плоскости. Верно ли, что тем самым мы зададим преобразование плоскости?

2. Докажите, что любое движение переводит прямую в прямую, а окружность — в окружность.
3. Сколько существует движений, переводящих квадрат сам в себя?
4. На координатной плоскости заданы точки $A(1; 2)$ и $B(5; 5)$. При движении плоскости эти точки переходят соответственно в точки $A'(2; 3)$ и $B'(7; 3)$. В какую точку при этом движении может перейти точка $M(-2; -3)$?
5. На плоскости даны две прямые, пересекающиеся под углом 45° . В результате двух последовательных симметрий относительно этих прямых точка A переходит в A' , а точка B — в B' . Найдите угол между прямыми AB и $A'B'$.
6. Докажите, что любое движение в пространстве может быть задано при помощи не более чем четырех симметрий относительно плоскостей.

12.2. Виды движений плоскости

Вы уже знакомы с такими преобразованиями плоскости, как поворот вокруг точки и параллельный перенос. (Мы не будем выделять центральную симметрию, поскольку она представляет собой поворот на 180° .) Легко видеть, что каждое из этих преобразований является движением. И здесь возникает естественный вопрос: а какие вообще имеются виды движений? С помощью теоремы 12.3 можно дать на этот вопрос исчерпывающий ответ. Мы будем классифицировать движения по числу задающих их осевых симметрий.



Прежде всего выделим отдельно *тождественное* преобразование, оставляющее каждую точку плоскости на месте. Понятно, что это преобразование является движением.

Параллельный перенос

Одна осевая симметрия так и задает осевую симметрию. Гораздо интереснее случай двух осевых симметрий. Здесь есть две возможности: оси симметрий параллельны и оси симметрий пересекаются. Соответственно сформулируем и докажем две теоремы.

Теорема 12.4.

В результате двух последовательных осевых симметрий с параллельными осями любая точка A плоскости переходит в такую точку A' , что вектор $\overrightarrow{AA'}$ постоянен для всех точек плоскости.

Такое преобразование называется *параллельным переносом*. Сам вектор $\overrightarrow{AA'}$ называется вектором *параллельного переноса*.

При этом вектор $\overrightarrow{AA'}$ перпендикулярен осям симметрий, направлен от первой ко второй оси и его длина в два раза больше расстояния между осями.

Доказательство. Рассмотрим какой-либо вектор \overrightarrow{AB} , перпендикулярный осям симметрии (рис. 331). После каждой симметрии он переходит в противоположный по направлению вектор такой же длины. Значит, после двух симметрий он перейдет в вектор $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, расположенный на той же прямой AB . Таким образом, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, т. е. для всех точек прямой, перпендикулярной осям симметрии, после двух последовательных симметрий происходит перемещение на один и тот же вектор.

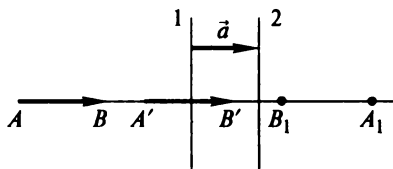


Рис. 331

Взяв точку A на первой оси симметрии, мы легко убедимся в том, что длина вектора параллельного переноса в самом деле в два раза больше расстояния между осями и он направлен от первой оси ко второй. ▼

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что, взяв любые две прямые, перпендикулярные вектору \vec{a} на расстоянии, равном $\frac{1}{2}|\vec{a}|$ друг от друга, после двух симметрий в соответствующем порядке относительно этих прямых мы получим параллельный перенос на вектор \vec{a} .

Поворот

Выясним теперь, какое движение получится в результате двух последовательных симметрий с пересекающимися осями. Ответ на этот вопрос дает нам следующая теорема.

Теорема 12.5.

Пусть две прямые l_1 и l_2 на плоскости пересекаются в точке O и образуют между собой угол α ($\alpha \leq 90^\circ$). В результате двух последовательных симметрий относительно прямых l_1 и l_2 мы получим поворот на угол 2α вокруг точки O . При этом направление поворота то же, что и у поворота на угол α , переводящего прямую l_1 в прямую l_2 .

Поясним, что утверждает эта теорема. Возьмем любую точку A на плоскости. Рассмотрим окружность с центром в точке O и радиусом OA (рис. 332). Эта окружность пересекает оси симметрий в четырех точках. Выберем из них две точки: точку B_1 на прямой l_1 и точку B_2 на прямой l_2 так, что $\angle B_2OB_1 = \alpha$. Эти две точки определяют на окружности направление движения: от точки B_1 к B_2 по меньшей дуге, соответствующей углу α . В результате последовательного применения симметрий относительно прямых l_1 и l_2 точка A перейдет в точку A' на этой окружности. Причем при движении от A к A' в указанном направлении мы получим меньшую дугу окружности, которой соответствует центральный угол величиной 2α .

Доказательство. Для точки B_1 утверждение теоремы очевидно. В общем случае после первой симметрии дуга AB_1 переходит в такую же, но противоположно направленную дугу. (Точка B_1 остается на месте.) После двух симметрий дуга AB_1 переходит в равную ей и так же на-

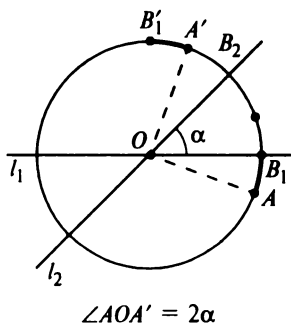


Рис. 332

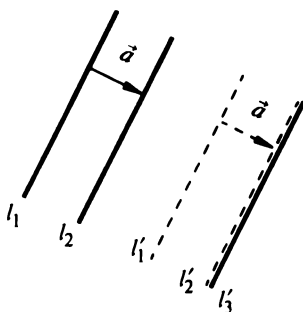


Рис. 333

правленную дугу $A'B'_1$. Значит, $\angle AOA' = \angle B_1OB'_1 = 2\alpha$, причем точки A и A' следуют друг за другом в том же порядке, что и B_1 и B'_1 . ▼

Здесь следует обратить внимание на то, что, как бы мы ни провели через точку O две пересекающиеся под углом α прямые, после двух последовательных симметрий относительно этих прямых мы получим поворот в соответствующем направлении на угол 2α вокруг точки O .

* Три осевые симметрии

Итак, нам осталось рассмотреть последний случай и ответить на вопрос: какое движение плоскости будет иметь место в результате трех последовательных осевых симметрий?

Случай, когда оси всех трех симметрий параллельны, без труда сводится к одной осевой симметрии. В самом деле, рассмотрим три параллельные прямые l_1 , l_2 и l_3 (рис. 333). Как мы знаем (теорема 12.3), результатом двух первых симметрий является параллельный перенос, причем если вместо l_1 и l_2 взять любые параллельные им две прямые l'_1 и l'_2 на том же расстоянии друг от друга (и одинаково направленным перпендикулярным вектором), то в результате получим тот же параллельный перенос. В частности, можно взять прямую l'_2 совпадающей с l_3 . Тогда симметрии относительно l'_2 и l_3 «взаимно уничтожатся» (дадут тождественное преобразование), и в результате останется одна осевая симметрия относительно l'_1 . Таким образом, как и утверждалось, три осевые симметрии с параллельными осями можно заменить одной осевой симметрией.

Точно так же три симметрии, оси которых проходят через одну точку, можно заменить одной осевой симметрией.

Теперь рассмотрим общий случай, когда среди трех осей есть пересекающиеся, но все они не имеют общей точки.

Теорема 12.6.

Три последовательные осевые симметрии, оси которых не все параллельны и не проходят через одну точку, можно заменить двумя движениями: симметрией и параллельным переносом.

Доказательство. Пусть осями симметрий являются прямые l_1 , l_2 и l_3 , причем прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке O (рис. 334). Тогда две первые симметрии можно заменить поворотом вокруг точки O на соответствующий угол. Если вместо l_1 и l_2 взять прямые l'_1 и l'_2 , пересекающиеся в точке O под тем же углом, то в результате симметрий относительно l'_1 и l'_2 будем иметь тот же поворот,

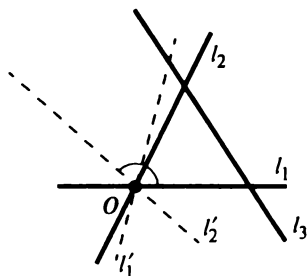


Рис. 334

что и в результате симметрий относительно l_1 и l_2 . (Прямые l'_1 и l'_2 получаются из прямых l_1 и l_2 любым поворотом вокруг O .) В частности, можно взять прямую l'_2 параллельной l_3 . Последовательные симметрии относительно l'_1 , l'_2 и l_3 дают то же движение, что и симметрии относительно l_1 , l_2 и l_3 . Но в силу параллельности l'_2 и l_3 симметрии относительно этих прямых можно заменить параллельным переносом. В результате получаем движение, состоящее последовательно из осевой симметрии и параллельного переноса. ▼

Оказывается, теорема 12.6 может быть уточнена.

*** Скользящая симметрия**

Добавим к трем рассмотренным движениям (осевой симметрии, параллельному переносу, повороту) еще одно.

Скользщей симметрией называется движение, состоящее последовательно из осевой симметрии и параллельного переноса, задаваемого вектором, параллельным оси симметрии.

Теорема 12.7.

Движение, получающееся в результате трех последовательных осевых симметрий с осями, не проходящими через одну точку, среди которых есть непараллельные, является скользящей симметрией.

Доказательство. Рассмотрим симметрии с осями l_1 , l_2 и l_3 . Пусть l_2 и l_3 пересекаются в точке P (рис. 335). (Если l_2 и l_3 параллельны, то мы

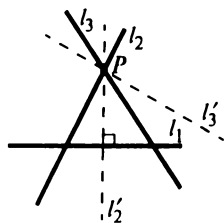


Рис. 335

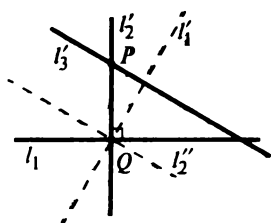


Рис. 336

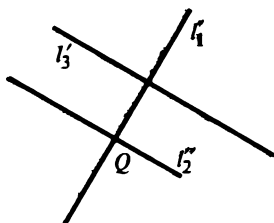


Рис. 337

сначала повернем вместе l_1 и l_2 вокруг точки их пересечения.) Повернем эти оси вокруг точки P так, чтобы l_2 перешла в прямую l'_2 , перпендикулярную l_1 . Получим новую тройку прямых l_1 , l'_2 и l'_3 , определяющих то же движение, что и исходные прямые l_1 , l_2 и l_3 (рис. 336). Теперь повернем прямые l_1 и l'_2 вокруг Q — точки их пересечения — так, чтобы l_1 перешла в прямую, перпендикулярную l'_2 . В результате получим прямые l'_1 , l'_2 и l'_3 (рис. 337), задающие то же движение, что и исходная тройка, причем l'_1 перпендикулярна l'_2 и l'_3 . Значит, l'_2 и l'_3 параллельны и задают перенос в направлении, параллельном l'_1 , т. е. рассматриваемое движение является скользящей симметрией. ▼

▲ ■ ● Задачи, задания, вопросы

- 1(в). В результате параллельного переноса точка A переходит в точку A' , а точка B — в точку B' . Найдите координаты точки B' , если известны координаты точек A , A' и B :
 - а) $A(-1; 3)$, $A'(2; 4)$, $B(1; -3)$;
 - б) $A(2; -2)$, $A'(0; 1)$, $B(-1; -5)$;
 - в) $A(-3; -2)$, $A'(-5; -1)$, $B(4; 7)$.
- 2(в). В результате параллельного переноса точка A переходит в точку A' , а прямая l — в прямую l' . Найдите уравнение прямой l' , если:
 - а) $A(-2; 5)$, $A'(3; -4)$; уравнение прямой l есть $2x - 3y = 1$;
 - б) $A(4; 7)$, $A'(-3; 13)$; уравнение прямой l есть $3x + 4y = 5$.
3. Найдите вектор параллельного переноса, если прямая, задаваемая уравнением $y = 3x - 2$, переходит в прямую $y = 3x + 4$, а прямая $3x + 2y = 2$ переходит в прямую $6x + 4y = 3$.

4(в). Будем считать положительным направлением вращения направление против движения часовой стрелки. Пусть оси координат таковы, что в результате поворота вокруг начала координат в положительном направлении на 90° точка $(0; 1)$ переходит в точку $(1; 0)$. Найдите координаты точки, в которую эта же точка $(0; 1)$ перейдет в результате поворота в положительном направлении на угол $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 150^\circ$.

Ответьте на этот же вопрос для тех же углов, если поворот происходит в противоположном направлении.

5(п). Какое наименьшее число вершин может иметь многоугольник, у которого есть две оси симметрии, пересекающиеся под углом: а) 30° ; б) 10° ; в) 87° ?

6(п). На плоскости даны два равных и не параллельных отрезка AB и $A'B'$. Постройте центр поворота, при котором точка A переходит в A' , а точка B переходит в B' .

7. На плоскости даны два равных отрезка AB и CD . Прямые AC и BD пересекаются в точке P . Пусть окружности, описанные около треугольников ABP и CDP , пересекаются в точке O , отличной от P . Докажите, что в результате поворота вокруг O на угол AOC точка A переходит в C , а точка B — в D .

8(п). Дана прямая l и точка A . Найдите геометрическое место точек M плоскости таких, что существует поворот на угол 60° с центром на прямой l , переводящий A в M .

9. Дан правильный шестиугольник. Сколько существует различных движений, переводящих его в себя? Сколько среди них симметрий, вращений, скользящих симметрий?

12.3. Гомотетия

Из преобразований плоскости, не являющихся движениями, мы рассмотрим одно, играющее в геометрии важную роль. Речь идет о преобразовании, называемом *гомотетией*.

Определение гомотетии

Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом k называется такое преобразование плоскости, при котором любая точка A переходит в точку A' такую, что $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ (рис. 338).

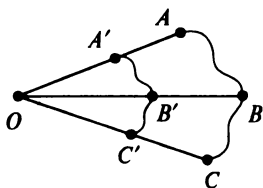


Рис. 338

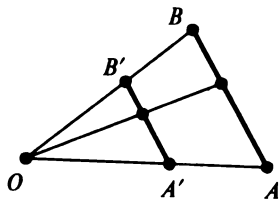


Рис. 339

Из определения гомотетии следует, что при $k = 1$ гомотетия является тождественным преобразованием.

При $k = -1$ гомотетия становится центральной симметрией.

Две гомотетии с центром в O и коэффициентами k и $\frac{1}{k}$ являются взаимно обратными. Это означает, что если одна из них переводит точку A в точку A' , то другая переводит A' в A .

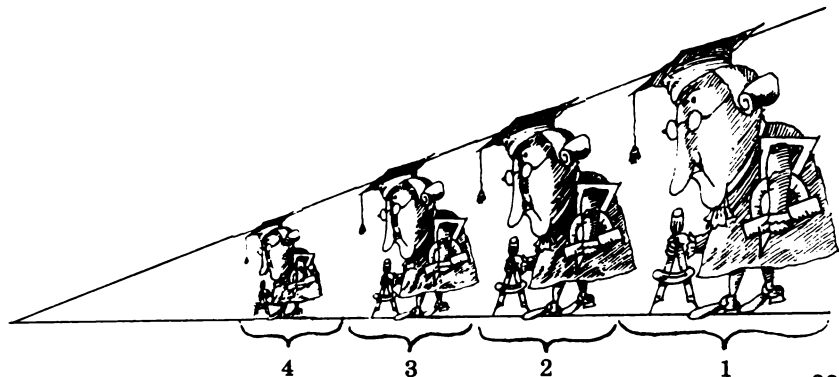
Свойства гомотетии

Основные свойства гомотетии выражает следующая теорема.

Теорема 12.8.

При гомотетии с коэффициентом k отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$, параллельный AB и такой, что $A'B' = |k| \cdot AB$, а любая фигура F отображается в фигуру F' , подобную F с коэффициентом подобия k . При этом всякий элемент фигуры F отображается в соответствующий элемент фигуры F' .

Доказательство. Пусть O — центр гомотетии (рис. 339). Треугольники OAB и $OA'B'$ подобны по первому признаку подобия:



$OA : OA' = OB : O'B'$ и $\angle AOB = \angle A'OB'$. Значит, $A'B' = |k|AB$ и $A'B'$ параллельна AB .

Понятно, что середина AB переходит при гомотетии в середину $A'B'$ и вообще, точка, делящая AB в каком-то отношении, переходит в точку на $A'B'$, делящую этот отрезок в том же отношении.

Из предыдущего утверждения следует, что при гомотетии с коэффициентом k треугольник ABC переходит в подобный ему с коэффициентом $|k|$ треугольник $A'B'C'$ (рис. 340). При этом стороны треугольников соответственно параллельны, а одинаково расположенные относительно этих треугольников точки соответствуют друг другу при гомотетии.

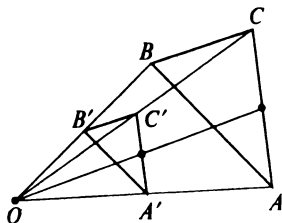


Рис. 340

Последнее утверждение легко распространяется на многоугольники. Ведь каждый многоугольник F можно разбить на треугольники, которые в результате гомотетии перейдут в подобные и так же расположенные треугольники, образующие многоугольник F' , подобный многоугольнику F с коэффициентом k .

Доказательство этого утверждения для произвольных фигур мы опустим, считая его очевидным. ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

- 1(в). На плоскости даны три точки O , A и A' , расположенные на одной прямой. Пусть гомотетия с центром в O переводит A в A' . Возьмем на плоскости произвольную точку B . Постройте точку B' , в которую переходит B при той же гомотетии.
2. На плоскости даны два параллельных отрезка. Сколько существует гомотетий, переводящих один отрезок в другой? Постройте центры этих гомотетий.
3. На прямой даны точки A , B , A' и B' . Постройте центр гомотетии, при которой точка A переходит в A' , а точка B переходит в B' .

- 4(в).** Докажите, что для любых двух неконцентрических и неравных окружностей существует ровно две гомотетии, переводящие одну окружность в другую. Постройте центр этих гомотетий.
- 5(в).** Докажите, что любые два неравных треугольника с соответственно параллельными сторонами гомотетичны.
- 6(в).** На плоскости даны окружность и точка A . Какую линию описывает середина отрезка AB , если точка B описывает данную окружность?
- 7.** На плоскости даны два параллельных отрезка AB и KM . Найдите геометрическое место центров всевозможных гомотетий, переводящих AB в отрезок $A'B'$, расположенный на KM .

Дополнительные задачи

.....

1. В прямоугольном треугольнике даны катеты a и b . Найдите расстояние от вершины прямого угла до ближайшей к ней точки вписанной окружности.
2. Чему равен острый угол ромба, в котором сторона есть среднее геометрическое диагоналей?
3. Около окружности описана равнобокая трапеция, одно из оснований которой равно a , а боковая сторона равна l . Найдите площадь трапеции.
4. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Найдите площадь средней части, если площади крайних частей равны S_1 и S_2 .
5. В равнобокой трапеции, описанной около окружности, отношение параллельных сторон равно k . Найдите косинус острого угла при основании трапеции.
6. В трапеции $ABCD$ основание AB равно a , а основание CD равно b . Найдите площадь трапеции, если известно, что диагонали трапеции являются биссектрисами углов DAB и ABC .

7. Площадь равнобокой трапеции, описанной около круга, равна S , а ее высота в два раза меньше боковой стороны. Найдите радиус вписанного в эту трапецию круга.
8. Дан полукруг с диаметром AB . Через середину полуокружности проведены две прямые, делящие полукруг на три равновеликие части. В каком отношении эти прямые делят диаметр AB ?
- 9(т). Сторона правильного треугольника равна a . Вершины этого треугольника служат центрами кругов с радиусами $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Найдите площадь общей части этих трех кругов.
10. Вне окружности радиуса R взята точка A , из которой проведены две секущие: одна проходит через центр, а другая на расстоянии $\frac{R}{2}$ от центра. Найдите площадь части круга, расположенной между этими секущими.
11. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ взяты две точки M и N так, что прямые MC и NC делят ромб на три равновеликие части. Найдите MN , если $BD = d$.
12. На стороне AB треугольника ABC взяты точки M и N так, что $AM : MN : NB = 1 : 2 : 3$. Через точки M и N проведены прямые, параллельные стороне AC . Найдите площадь части треугольника, заключенной между этими прямыми, если площадь треугольника ABC равна S .
- 13(т). Через точку внутри треугольника проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разделили данный треугольник на три треугольника и три параллелограмма. Радиусы окружностей, вписанных в три образовавшихся треугольника, равны a , b и c . Найдите радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.
- 14(т). В окружности радиуса R взята дуга в 120° . В сегмент, соответствующий этой дуге, вписан прямоугольник $ABCD$ такой, что $AB : BC = 1 : 4$; сторона BC лежит на хорде, ограничивающей сегмент. Найдите площадь прямоугольника.
15. Площадь кругового кольца равна S . Радиус большей окружности равен длине меньшей. Найдите радиус меньшей окружности.
16. Дан ромб со стороной a и острым углом α . Найдите радиус окружности, проходящей через две соседние вершины ромба и касающейся противоположной стороны ромба или ее продолжения.

- 17(т). Окружность радиуса r касается прямой в точке M . На этой прямой по разные стороны от M взяты точки A и B так, что $MA = MB = a$. Чему равен радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся данной окружности?
- 18(т). У прямоугольника $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$. На стороне AB , как на диаметре, построена окружность и к ней из вершины C проведена касательная, пересекающая сторону AD в точке K . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник CDK .
19. Вокруг треугольника ABC , в котором $BC = a$, $\angle CBA = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, описана окружность. Биссектриса угла A пересекает окружность в точке K . Найдите AK .
20. В окружности радиуса R проведен диаметр, и на нем взята точка A на расстоянии a от центра. Найдите радиус окружности, которая касается диаметра в точке A и изнутри касается данной окружности.
- 21(т). В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды. Каждая хорда разделена точками пересечения на три равные части. Найдите радиус окружности, если одна из хорд равна a .
22. Один правильный шестиугольник вписан в окружность, а другой описан около нее. Найдите радиус окружности, если разность периметров этих шестиугольников равна a .
23. Из точки, расположенной на стороне треугольника, проведены прямые, которые параллельны двум его другим сторонам. Эти прямые разделили треугольник на два треугольника и один параллелограмм. Площадь одного из треугольников равна P , а площадь параллелограмма равна Q . Найдите площадь исходного треугольника.
- 24(т). Найдите сумму квадратов расстояний от точки M , взятой на диаметре некоторой окружности, до концов некоторой хорды, параллельной этому диаметру, если радиус окружности равен R , а расстояние от точки M до центра окружности равно a .
25. Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность радиуса r , пересекающая сторону BC в точке D . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A , D и C , если стороны $AB = c$, $AC = b$.
26. В окружность радиуса R вписан шестиугольник $ABCDEF$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ACD .
27. В треугольнике ABC заданы: $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Найдите радиус окружности, касающейся стороны AC в точке A и касающейся стороны BC .

28. В параллелограмме $ABCD$ известно: $AB = a$, $AD = b$, $b > a$, острый угол при вершине A равен α . На сторонах AD и BC взяты точки K и M так, что $BKDM$ — ромб. Найдите сторону этого ромба.
29. Стороны четырехугольника последовательно равны 4, 5, 6 и 7. В этом четырехугольнике провели одну из диагоналей, и в каждый из образовавшихся треугольников вписали окружность. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с диагональю.
30. Найдите синус острого угла ромба, если площадь вписанного в него круга в два раза меньше площади ромба.
31. Найдите площадь общей части двух равных квадратов со стороной a , получающихся друг из друга поворотом вокруг вершины на угол 45° .
32. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD . Площади треугольников ABD и ADC равны S_1 и S_2 . Найдите AC .
33. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны a и b и пересекаются под углом 60° . Найдите диагонали четырехугольника.
34. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM , а угол B равен 120° . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.
35. Две окружности радиусов R и r касаются сторон данного угла и друг друга. Найдите радиус третьей окружности, касающейся сторон этого же угла, центр которой находится в точке касания данных окружностей.
36. Две окружности, радиусы которых равны соответственно R и r , касаются сторон угла. На отрезке, соединяющем центры этих окружностей, как на диаметре, построена третья окружность. Чему равно расстояние между центрами двух первых окружностей, если известно, что третья окружность также касается сторон того же угла?
- 37(т). Дан прямоугольник со сторонами 7 и 8. Одна вершина правильного треугольника совпадает с вершиной этого прямоугольника, а две другие находятся на его сторонах, не содержащих этой вершины. Найдите площадь правильного треугольника.
- 38(т). Найдите радиус наименьшей окружности, содержащей равнобокую трапецию с основаниями 15 и 4 и боковыми сторонами,

равными 9. (Все вершины трапеции должны располагаться либо на самой окружности, либо внутри нее.)

- 39(т). На плоскости проведены три прямые, образующие правильный треугольник. Некоторая точка плоскости расположена на расстояниях 2, 3 и 6 от этих прямых. Найдите сторону треугольника, если известно, что его площадь меньше 14.
40. Известно, что окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC и центр описанной около него окружности, проходит и через центр вписанной окружности. Докажите, что окружность проходит также и через точку пересечения высот этого треугольника. Чему равен угол C треугольника?
- 41(т). Окружность, проходящая через вершины A , B и C параллелограмма $ABCD$, пересекает прямые AD и CD в точках M и N . Точка M удалена от вершин B , C и D соответственно на расстояния 4, 3 и 2. Найдите MN .
42. Внутри единичного квадрата $ABCD$ расположены три равные окружности. Первая вписана в угол A , вторая — в угол D , а третья касается стороны BC и двух других окружностей. Найдите радиусы этих окружностей.
- 43(т). В треугольнике ABC сторона BC равна a , радиус вписанной окружности равен r . Определите радиусы двух равных окружностей, касающихся друг друга, если одна из них касается сторон BC и BA , а другая — сторон BC и CA .
- 44(т). Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.
- 45(т). Радиусы двух окружностей равны R и r , а расстояние между их центрами равно a . Найдите сторону ромба, две противоположные вершины которого лежат на одной окружности, а две оставшиеся вершины — на другой.
- 46(т). В треугольнике ABC углы A и B соответственно равны 45° и 15° . На продолжении стороны AC за точку C взята точка M так, что $CM = 2AC$. Найдите $\angle AMB$.
- 47(т). Биссектрисы углов трапеции делят каждое из ее оснований на три равные части. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 1.
- 48(т). Дан квадрат $ABCD$, M — середина CD . На отрезке AC взята точка P так, что $\angle ABP = \angle CPM = \alpha$. Найдите величину α и отношение, в котором P делит AC .
- 49(т). В прямоугольном треугольнике ABC один из острых углов равен 30° , M — середина гипотенузы AB , O — центр вписанной окружности. Чему равен угол OMC ?

- 50(т). В данный треугольник вписана окружность, в которой проведены три касательные, параллельные сторонам треугольника. Эти касательные отсекают от данного треугольника три треугольника. Суммы высот этих треугольников равны a , b и c . Найдите сумму высот данного треугольника.
- 51(т). На плоскости отмечены две точки A и B . Найдите геометрическое место точек C плоскости таких, что в треугольнике ABC медиана к стороне BC перпендикулярна стороне AC .
52. Медиана треугольника делит его на два треугольника. Может ли радиус окружности, вписанной в один из образовавшихся треугольников, быть ровно в два раза больше радиуса окружности, вписанной в другой треугольник?
- 53(т). В треугольнике ABC угол B равен 100° . Биссектриса угла C пересекает AB в точке E . На стороне AC взята точка D так, что угол CBD равен 20° . Докажите, что угол CED равен 10° .
54. Можно ли квадрат разрезать на три не равных, но подобных между собой прямоугольника?
- 55(т). Разрежьте прямоугольный треугольник с углом 30° на четыре части, из которых можно сложить квадрат.
- 56(т). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle BAC = 20^\circ$, $\angle BCA = 35^\circ$, $\angle BDC = 40^\circ$, $\angle BDA = 70^\circ$. Найдите угол между диагоналями этого четырехугольника.
- 57(т). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle BCA = 70^\circ$, $\angle BDC = 20^\circ$, $\angle BDA = 35^\circ$. Найдите угол между диагоналями этого четырехугольника.
58. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Его диагонали пересекаются в точке K . Окружность, проходящая через точки A , B и K , вторично пересекает BC и AD в точках M и N . Докажите, что $KM = KN$.
59. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит этот треугольник на два. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в исходный треугольник и два образовавшихся, равна высоте исходного треугольника.
- 60(т). Точка K лежит на стороне CD квадрата $ABCD$, биссектриса угла BAK пересекает сторону BC в точке L . Докажите, что $BL + KD = AK$.
- 61(т). Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M таким образом, что $\angle MBC = \angle MDB = \alpha$. Найдите угол MAD .
- 62(т). Расстояния от некоторой точки плоскости до трех последовательных вершин прямоугольника равны 3, 4 и 5. Найдите площадь этого прямоугольника.

- 63(т). Из точки A , расположенной вне окружности, проведены две касательные AM и AN (M и N — точки касания) и секущая, пересекающая окружность в точках P и Q . Пусть L — середина PQ . Докажите, что $\angle MLA = \angle NLA$.
- 64(т). Внутри треугольника имеются две точки. Расстояния от одной из них до сторон треугольника равны 1, 3 и 15, а от другой (в том же порядке) — 4, 5 и 11. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.
- 65(т). Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R . Его диагонали пересекаются в точке M . Известно, что $AB = BC = a$, $BD = m$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCM .
- 66(т). В окружности проведена хорда AB . Пусть C — произвольная точка окружности. Найдите геометрическое место середин двухзвенной ломаной ACB .
67. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается AC и BC в точках N и K соответственно. Докажите, что хотя бы один из углов NBA и KAB меньше 30° .
- 68(т). Найдите площадь треугольника, вписанного в параллелограмм, если известно, что оставшая часть параллелограмма представляет собой три треугольника единичной площади.
69. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению ее оснований.
- 70(т). Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Проведены четыре прямые: через A параллельно BD , через B параллельно CD , через C параллельно AB и через D параллельно AC . Эти прямые пересекаются в одной точке. Найдите отношение $AD : BC$.
- 71(т). Внутри ромба $ABCD$ находится точка M такая, что $\angle MBD = \angle MCA = 30^\circ$ и отрезки MB и MC не пересекают диагонали ромба. Найдите $\angle AMD$.
72. Найдите наименьшее значение следующего выражения:

$$\sqrt{1 + x^2} - x + \sqrt{1 + x^2} - x\sqrt{3}.$$
73. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 2, а один из острых углов равен 60° . Найдите радиус окружности с центром в вершине этого угла, делящей данный треугольник на две равновеликие части.
74. Через одну из точек пересечения двух окружностей проведена прямая, вторично пересекающая эти окружности в точках A и B . Как надо провести эту прямую, чтобы длина отрезка AB была

наибольшей? Найдите длину такого наибольшего отрезка, если расстояние между центрами окружностей равно a .

- 75(т). Используя результат предыдущей задачи, решите следующую задачу. Найдите сторону наибольшего правильного треугольника, описанного около прямоугольного треугольника, если один из его острых углов равен 30° , а гипотенуза равна 2. (На каждой стороне правильного треугольника лежит одна вершина данного прямоугольного.)
- 76(т). Найдите сторону наименьшего правильного треугольника, вписанного в прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 2, и острым углом 30° . (См. задачи 74 и 75.)
77. Найдите отношение сторон прямоугольника, вписанного в прямоугольный треугольник так, что одна из вершин прямоугольника совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а центр прямоугольника равноудален от концов гипотенузы, если тангенс большего угла треугольника равен k .
78. В треугольнике ABC угол B не является прямым. Окружность, вписанная в этот треугольник, касается AB и BC в точках C_1 и A_1 , а основаниями высот, проведенных к сторонам AB и BC , являются точки C_2 и A_2 . Докажите, что точка пересечения высот треугольника A_1BC_1 является центром окружности, вписанной в треугольник A_2BC_2 .
79. В треугольнике ABC угол A равен α , а расстояние между центрами вписанной окружности и внеписанной, касающейся стороны BC , равно d . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .
80. Имеется ромб с острым углом α и стороной a . Две параллельные прямые, расстояние между которыми равно высоте ромба, пересекают все четыре стороны ромба. Чему может быть равна сумма периметров двух треугольников, отсекаемых от ромба проведенными прямыми? (Эти два треугольника лежат вне полосы между параллельными прямыми.)
- 81(т). Внутри правильного треугольника ABC взята произвольная точка M . Докажите, что на сторонах AB , BC и CA можно выбрать соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 так, что $B_1C_1 = AM$, $C_1A_1 = BM$, $A_1B_1 = CM$. Найдите BA_1 , если известно, что $AB_1 = a$, $AC_1 = b$, $a > b$.
- 82(т). В треугольнике ABC стороны CB и CA равны соответственно a и b . Биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке K , а описанную около треугольника окружность — в точке M . Окружность, описанная около треугольника AMK , вторично пересекает прямую CA в точке P . Найдите длину отрезка AP .

Ответы и указания

.....

Седьмой класс

2.1 2. Точка A лежит между B и C . 4. а) 1; б) $\frac{6}{5}$; в) $2\frac{1}{2}$; г) $1\frac{5}{7}$; д) 0,5; е) 2; ж) 1.

5. Кроме ответов, указанных в задаче 4, возможны еще следующие значения для

BM : а) 3; б) 6; в) $3\frac{3}{4}$; г) 12. 6. 0,5. 7. а) 9,9 и 1,5; б) 4,9 и 0,7. 8. а) 3,4; б) 2,3; в) 6 или

1. 9. а) Один отрезок и два луча; б) три отрезка и четыре луча; в) шесть отрезков и шесть лучей; г) десять отрезков и восемь лучей. 10. а) 4,3; 0,9; 1,9; 1,5; б) 6,2; 1,6; 2,6;

2; в) 6,7; 0,7; 4,1; 1,9. 11. $1\frac{1}{3}$. 12. Возможны три варианта ответа: $KM = 1\frac{1}{3}$; $KM = 2$;

$KM = 4$. 14. $CA = 3,3$. 15. 1,3. 19. Задача имеет два решения: точка M может быть серединой AB , а также лежать на луче BA так, что $BM = 3$. 20. Если точки движутся в одном направлении, то середина отрезка переместится на величину

$\frac{3+1}{2} = 2$. Если в разных, то на величину $\frac{3-1}{2} = 1$. 21. $\frac{BM}{MC} = \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

22. а) Точка M лежит на BC , причем $BM = 1\frac{1}{2}$; б) подходят все точки отрезка

BC , включая его концы. 26. Во всех случаях $MM_2 = 2AB = 2$. 30. а) 6; б) $-2,7$; в) 3,2;

г) $-47,4$. 32. а) 3; б) $-0,7$; в) 11. 34. В первом случае колодец надо вырыть возле дома B . Во втором — где угодно на отрезке BC .

2.2 1. Три или четыре. 2. На семь частей. Отрезков три, лучей шесть. 4. Четыре — параллельными прямыми. 5. По разные стороны.

2.3 2. 110° . 3. 30° . 4. Первый угол больше второго на 20° . 5. 88° . 6. Углы между

прямыми равны 28° , 36° , 64° . 8. 3. 9. 5. 11. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. 13. 60° или 20° . 15. 60° .

2.4 1. а) 2; б) 2 или 4. 3. а) 15; б) 200,21; в) 25,3; г) $\frac{1913}{1001}$; д) такой треугольник

невозможен. 4. Периметр треугольника BCM больше на $\frac{1}{2}$. 5. 3:1. 6. 21. 7. 6. 18. 9; 14.

Число диагоналей стоугольника равно 4850. 20. Нет. 21. 10 треугольников и один пятиугольник.

3.1 1. Может. 3. 1. 4. Пополам.

3.2 1. $\triangle BAK = \triangle MAC$, $\triangle BAC = \triangle MAK$, $\triangle BKC = \triangle MCK$, $\triangle BCM = \triangle MKB$.

14. $AP = 2$. 15. $AK = 5$, $BK = 2$. (Точка K находится на продолжении стороны AB за точку B .) 16. $AK = AM = 3$, $BK = BL = 2$, $CL = CM = 4$. 24. $BC = 5$, $PK = 3$.

- 3.3** 2. а) $AB = 1$, $AC = 7$; б) $AB = 2$, $AC = 8$. 3. $AC = 3,7$. 5. $AB = 7$. 6. 19,7. 7. $b > a$. 9. а) Наибольшее значение AB равно 15, наименьшее равно 1; б) 15 и 0. 10. Время путешествия не меньше $\frac{1}{7}$ ч, но не больше 1 ч. 14. Во всех случаях задача имеет четыре решения: а) $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$; б) 1, 2, 3, 4; в) 1, 2, 3, 6. 17. Задача имеет четыре решения. Радиусы окружностей с центрами в вершинах, соответственно противоположных сторонам 5, 6 и 7, могут быть равны: 1) 4, 3, 2; 2) 9, 2, 3; 3) 2, 9, 4; 4) 3, 4, 9. 18. Возможны три треугольника со сторонами: 2, 3 и 4; 2, 4 и 5; 3, 4 и 5. 19. Диагональ равна 2,8.
- 4.4** 1. $AM : MD = 38 : 33$. 2. 0,6. 3. $KM : MP = 3 : 1$. 4. 2,5 или 0,5. 5. 2, $3\frac{3}{5}$, $4\frac{1}{2}$. 6. 140° . 7. 80° или 60° . 8. 60° . 9. 11. 10. 5. 11. 7 или 9. 12. $AD = 4$.

Восьмой класс

- 5.1** 2. Нет, не следует. 4. 60° . 6. а) 40° , 40° , 100° ; б) 80° , 80° , 20° или 50° , 50° , 80° . 8. Для всех пунктов ответ один: 360° . 9. $\angle ABC = 65^\circ$, $\angle ACB = 35^\circ$, $\angle CAB = 80^\circ$. 11. а) 40° , 40° , 100° ; б) 80° , 80° , 20° или 50° , 50° , 80° . 12. 140° . 13. б) $\angle MKC = \frac{\alpha}{2}$, $\angle KMC = \frac{\beta}{2}$, $\angle KCM = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$. 16. 36° , 72° , 72° . 17. 36° , 72° , 72° или 90° , 45° , 45° . 19. 40° , 90° , 50° . 20. α или $(180^\circ - \alpha)$. 21. а) 80° , 70° , 30° ; б) 30° , 40° , 110° . 22. 180° . 23. $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. 24. 20° , 30° , 130° . 25. $\angle KPM = 45^\circ$. 26. $90^\circ - \alpha$. 28. $\angle AKM = \alpha$. 29. а) $\angle OA_4A_5 = \angle OA_5A_4 = 80^\circ$, $\angle A_4A_1A_5 = 30^\circ$; б) 70° , 10° , 100° . 30. 12° , 132° , 36° . 31. $\angle ACB_1 = 60^\circ$, $\angle KPM = 120^\circ$.
- 5.2** 1. 30° , 45° , 105° . 2. 65° , 85° , 30° . 3. 120° . 5. $AC = 1$. 7. $\angle ABC = 112^\circ$, $\angle BCD = 77^\circ$, $\angle CDA = 68^\circ$, $\angle DAB = 103^\circ$. 10. 140° . 11. 52° . 12. Задача имеет четыре решения. Углы A , B , C и D четырехугольника могут быть равными соответственно следующим величинам: 1) 80° , 60° , 100° , 120° ; 2) 60° , 80° , 100° , 120° ; 3) 120° , 100° , 60° , 80° ; 4) 100° , 120° , 80° , 60° . 13. В первом случае сумма углов равна 180° , во втором 540° . 15. 2.
- 5.4** 1. 50° , 60° , 70° . 2. 44° . 3. 25° , 40° , 115° . 5. $AB = 1$. 7. $\angle BA_1C = \alpha$, $\angle BC_1A = \beta$, $\angle A_1BC_1 = 180^\circ - \alpha - \beta$. 8. 1 для пунктов а) и б). 9. 1,5 и 3,5. 14. 20° .
- 6.1** 3. У прямоугольника и ромба две оси симметрии, у квадрата — четыре. 4. а) Нет, не верно; б) верно; в) нет, не верно; г) нет, не верно; д) верно. 6. 1. 7. 2. 9. 40° или 50° . 11. $AD = BC = 4$, $AB = CD = 3$. 12. Задача имеет восемь решений. Стороны исходного параллелограмма равны 1 и 5; 4 и 5; 3 и 7; 4 и 7; 3 и 8; 5 и 8; 5 и 7; 2 и 7.
- 6.2** 8. $3\frac{3}{4}$. 11. $\frac{1}{2}|a - b|$. 19. $4\frac{1}{2}$. 20. $\frac{2a + b}{3}$, $\frac{a + 2b}{3}$. 29. $\frac{1}{2}$.

- 6.3** 3. Нет. 8. $7\frac{1}{2}$. 11. 2. 12. 2. 13. 120° . 15. 8 и 27. 18. 4. 19. 1. 20. 4, 2. 23. \sqrt{ab} .
 24. $\frac{2ab}{a+b}$. 25. $a\frac{r}{R}$. 26. а) $\frac{3}{8}\sqrt{3}$ и $\frac{5}{8}\sqrt{3}$ или $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ и $\frac{5}{2}\sqrt{3}$; б) $\frac{3}{8}\sqrt{5}$ и $\frac{5}{8}\sqrt{5}$.
 27. а) Большая сторона равна $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Точка M находится на расстояниях $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 и $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ соответственно от левой и нижней сторон исходного прямоугольника.
 28. $\triangle ABD \sim \triangle DAC$. 29. а) 19,52; б) 38; в) такая пирамида невозможна.

- 7.1** 2. $2\frac{2}{5}$, $1\frac{4}{5}$, $3\frac{1}{5}$. 3. $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$. 4. 13. 5. $\sqrt{5}$. 6. $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a\frac{\sqrt{3}}{6}$. 7. $\frac{5}{7}a$. 8. $a\sqrt{2}$.
 10. $\sqrt{5}$. 14. Высота равна $\frac{4}{9}\sqrt{110}$ и делит сторону на отрезки $3\frac{7}{9}$, $5\frac{2}{9}$. 15. $7\frac{1}{2}$.
 17. 90° . 18. $6\frac{18}{25}$. 20. $\frac{a+b}{2}$. 21. 9. 22. 15° . 23. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
 25. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

- 7.2** 3. а) $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; б) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$; в) $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$,
 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ или $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. 5. а) Остроугольный; б) тупоугольный;
 в) прямоугольный; г) тупоугольный; д) остроугольный; е) такой треугольник
 невозможен. 6. $\frac{3+\sqrt{37}}{2}$. 8. $3\sqrt{10}$. 9. $8\sqrt{\frac{2}{15}}$. 10. 6, $\frac{1}{4}\sqrt{274}$. 11. $-3 + \sqrt{22}$.
 13. $\frac{\sqrt{14}}{12}$. 14. $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 15^\circ =$
 $= 2 + \sqrt{3}$. 15. $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. 16. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. 17. $\frac{ab}{2h}$.
 18. $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, $2(\sqrt{3}-1)$. 19. $\frac{b^2}{2h}$, $\frac{a^2+4h^2}{8h}$, $\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. 20. $\frac{5}{6}\sqrt{13}$. 21. $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{46}{15}}$.
 23. $\frac{\sqrt{10}}{4}$. 24. $\sqrt{2}$. 25. $2\left(2R \sin \alpha + r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)$. 26. $2a(1 + \cos \alpha)$. 27. $\frac{ab}{c}$. 28. $\frac{a}{2 \sin \alpha}$.
 29. $\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$.

7.3 1. 1 : 6. 3. 3. 4. $4\sqrt{2}$. 5. 1 : 7. 6. $\sqrt{2}$. 7. $3\sqrt{3}$. 8. 90° . 9. 1, 1. 10. 1 : 4. 12. 2.
14. $\frac{128}{63}$.

8.1 1. 140° , 20° , 160° . 3. а) 55° , 65° , 60° ; б) 5° , 15° , 160° . 4. $\angle BJC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$,
 $\angle BJ_aC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle BJ_bC = \frac{\alpha}{2}$. 5. 10° . 10. $180^\circ - \alpha$ или α . 17. $\frac{3}{4}$.

8.2 2. 4 : 3. 3. 1 : 2. 6. $\frac{1}{6}\sqrt{145}$. 7. $\frac{\sqrt{2380}}{11}$, $\frac{\sqrt{2380}}{17}$. 8. а) $p = \frac{9}{2}$, $l = \frac{8}{3}$; б) $p = 5$, $l = 1$;
в) $m = \frac{2}{3}$, $l = 5$; г) $m = \frac{1}{2}$, $p = 3$; д) $k = \frac{1}{4}$, $p = 15$; е) $k = \frac{1}{3}$, $m = 2$. 9. а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{1}{12}$;
в) $\frac{5}{4}$. 10. \sqrt{ab} . 11. \sqrt{ab} . 12. \sqrt{ab} . 13. \sqrt{ab} . 14. \sqrt{ab} . 15. \sqrt{ab} . 16. \sqrt{ab} . 17. \sqrt{ab} .
18. $\frac{ab}{a - b}$.

8.4 4. 8. 8. $2\sqrt{30}$.

8.5 5. $\angle AOB = 2C$, $\angle AJB = 90^\circ + \frac{1}{2}C$. 6. 60° . 10. $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}$.
11. 30° . 12. 2.

8.6 1. а) $\frac{1}{3}$; б) $\sqrt{2} - 1$. 2. $\frac{R^2 - a^2}{2R}$. 3. $\frac{2}{\sqrt{5}}R$. 4. $\frac{2R}{\sqrt{10}}$. 6. $\frac{4Rr(R - r)}{(R + r)^2}$. 7. $\frac{R}{4}$, $\frac{R}{18}$.
8. $\frac{\sqrt{17} - 2\sqrt{3}}{5}$. 9. $\frac{5}{8}$. 10. а) $\frac{9}{4}$ и $\frac{9}{2}$; б) $\frac{9}{8}$; в) $\frac{9}{2}$ и $\frac{9}{10}$. 11. p . 12. $\frac{Rr}{(\sqrt{R} \pm \sqrt{r})^2}$.

8.7 1. а) 20° , 100° , 60° ; б) 120° , 20° , 40° ; в) 30° , 50° , 100° . 2. Нет. 3. 50° , 60° , 70° .
4. а) 2° , 158° , 20° ; б) 32° , 18° , 130° ; в) 40° , 12° , 128° . 7. $12\sqrt{13}$, $18\sqrt{13}$. 8. 18, $12\sqrt{2}$.
9. $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. 10. 30° . 11. $3(\sqrt{2} - 1)$. 12. 6, 25. 13. $\sqrt{3}$. 14. $\frac{30 - 5\sqrt{14}}{11}$. 15. 45°
или 135° . 16. $R\sqrt{3}$. 17. $\frac{a}{\sqrt{3}}$ и $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. 18. 3, $13\frac{1}{3}$, $2\frac{38}{41}$. 19. 6. 20. а) $4\frac{4}{5}$; б) $20\frac{4}{5}$.
21. $2r\sqrt{3}$ и $2r$. 22. 4° . 23. 2. 24. $\frac{37}{2\sqrt{7}}$. 25. $\angle ODM = \alpha$. 26. 90° . 27. $\frac{1}{2}\sqrt{15}$. 28. 4.
29. $\sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}}$. 33. Если $a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, то решений нет; если $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $AC = \frac{1}{2}$;
если $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, то $AC = \frac{1 \pm \sqrt{4a^2 - 3}}{2}$; если $a \geq 1$, то $AC = \frac{1 + \sqrt{4a^2 - 3}}{2}$.

$$34. 3\sqrt{30}. 37. \sqrt{6}. 38. \frac{31\sqrt{2353}\sqrt{193}}{504} 43. 2 44. а) 15^\circ, 100^\circ, 65^\circ; б) 30^\circ, 80^\circ, 70^\circ.$$

$$45. \frac{\sqrt{5}}{2}. 46. 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ. 47. 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ. 48. \sqrt{10} : 4. 49. \sqrt{13}. 50. \frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$51. \frac{a + b - 2\sqrt{ab} \cos \alpha}{2 \sin \alpha}. 52. \frac{\sin(3\alpha - 180^\circ)}{\sin \alpha}. 53. \sqrt{3}. 54. 45^\circ. 55. \frac{5}{3}. 57. 3 : 1.$$

$$58. \frac{\sqrt{6}}{2}. 59. 2. 62. 30^\circ, 40^\circ, 110^\circ. 65. 80^\circ. 74. d \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Девятый класс

$$\boxed{9.1} \quad 1. \text{ Увеличится в } k^2 \text{ раз. } 4. d^2.$$

$$\boxed{9.2} \quad 2. 1) \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}. 6. \text{ Площадь такого треугольника может быть сколь угодно}$$

большой. 8. Искомое геометрическое место состоит из двух прямых, параллельных AB и симметричных относительно AB . Одна из них проходит через C .

9. Искомое геометрическое место состоит из двух прямых, проходящих через A .

Одна из них проходит через середину BC , а другая параллельна BC . 10. а) $4\sqrt{26}$;

$$б) 13\frac{1}{2}; в) 21\frac{1}{2}. 11. \frac{\sqrt{3}}{4}. 15. \sqrt{pq}. 17. 25. 20. \frac{pq}{r}. 21. \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}. 22. 1. 25. 6 \text{ или}$$

$$4 + \sqrt{2}. 28. \sqrt{3}. 29. ab + bc + ca. 30. 1; 3; 1\frac{1}{2}; 3\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{9.3} \quad 1. \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}. 2. \frac{2ab}{a\sqrt{3}+b}. 3. \frac{2}{7}. 4. 1 : 14. 5. \frac{11}{12}. 7. \text{ Если } \angle CBA = 90^\circ, \text{ то задача}$$

не имеет решения ($\angle CBA = 90^\circ$, если $a = b\frac{\sqrt{3}}{2}$). В остальных случаях

$$CM = \frac{ab}{|2a - b\sqrt{3}|}. 8. \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{|a^2 - b^2|}. 9. 5 : 13. 10. 5 : 3 : 2. 11. 0,4. 14. \frac{3}{16} S. 16. \frac{c}{3}.$$

$$\boxed{10.1} \quad 1. R\sqrt{3}, R\sqrt{2}, R. 2. \frac{a_3}{\sqrt{3}} \text{ и } \frac{a_3}{2\sqrt{3}}, \frac{a_4}{\sqrt{2}} \text{ и } \frac{a_4}{2}, a_6 \text{ и } \frac{2a_6}{\sqrt{3}}. 8. \frac{R\sqrt{6}}{8}.$$

$$9. a_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R. 10. a_5 = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}. 12. \text{ Нет, не следует. Нужный пример}$$

даст нам прямоугольник. 13. Нет, не следует. Нужный пример даст нам ромб.

10.2 2. а) Величина «зазора» более 15 см; б) наибольшее расстояние от веревки до поверхности земного шара будет более 122 м. 4. 3 : 4. 5. 57,3 м. 6. $\frac{\pi}{18}$, $\frac{\pi}{6}$,

$\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{18}$, $\frac{5\pi}{9}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{35}{36}\pi$. 7. 5°, 30°, 90°, 144°, 45°50'10'', 171°53'49'', 19°6'.

10.4 1. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, 3, π , $12(2 - \sqrt{3})$, $2\sqrt{3}$. 2. Площадь круга больше площади квадрата

на величину $\frac{4 - \pi}{16\pi}$. 3. $\sqrt{2\pi\sqrt{3}}$. 4. $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$. 5. $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$. 6. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. 7. $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$.

8. $1 + \frac{5\pi}{18}$. 11. $6\sqrt{3} - 6 - \pi$. 13. Возможно. 14. $\frac{\pi ab}{4}$.

11.1 1. а) $3\sqrt{2}$; б) $\sqrt{16,01}$; в) 5; г) 0,13. 4. (10; 0) и (18; 0). 5. а) (1; 1); б) (0; $\frac{7}{3}$); в) кроме точки, указанной в п. б), имеется еще одна точка (-8; 13); г) $(1 \pm 4\sqrt{3}, 1 \pm 3\sqrt{3})$; д) (1, 1).

11.2 1. а) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 4x - 9 = 0$; в) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 17 = 0$. 2. а) $y = 2x - 7$; б) $y = -3x + 4$; в) $3x - 2y = 9$. 3. а) $\sqrt{26} + \sqrt{5} + 1$ и $\sqrt{26} - \sqrt{5} - 1$; б) $\frac{\sqrt{10}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{410}}{2}$ и $\frac{\sqrt{410}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$; в) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 3 + \sqrt{6})$ и 0; г) $\frac{1}{2}(5\sqrt{2} + \sqrt{10})$ и $\frac{1}{2}(5\sqrt{2} - \sqrt{10})$. 4. а) Точка (2; 3); б) пустое множество;

в) окружность с центром $(\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$ и радиусом $\frac{1}{2}\sqrt{62}$; г) половина окружности с центром (0; 1) и радиусом $\sqrt{5}$, удовлетворяющая условию $y \geq 1$; д) две окружности: $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 1$. 5. $3x - 7y - 2 = 0$. 6. а) Окружность: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 12$; б) прямая: $x - y = 3$; в) окружность: $(x - \frac{11}{3})^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{32}{9}$; г) из условия следует, что $\angle AMB = 60^\circ$. 8. а) $y = -\frac{x}{2}$; б) $4x + 3y = 12$; в) $y = x - 1$.

9. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; в) $\frac{6}{\sqrt{13}}$.

11.3 1. (6; -4); (4; 0); (-2; 4); (7; -10); $(\frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{2}{\sqrt{13}})$; (0; -2). 2. (2; -17); (6; -16); $(\frac{13}{6}; -\frac{23}{6})$. 3. $(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}})$. 10. Точки M заполняют отрезок OA, где O — начало координат, A(3; 4).

11.4 1. а) 180° ; б) 60° ; в) 120° . 2. -3 ; 1 ; -22 . 4. а) -33 ; б) -20 ; в) 12 ; г) -10 ; д) 10 .

5. $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$. 10. а) Серединный перпендикуляр к AD ; б) M — центр квадрата; в) окружность, описанная около квадрата. 11. $6R^2$.

11.5 1. Окружность с центром в середине AB и радиусом $\sqrt{\frac{1}{2}}$. 3. Прямая, проходящая через середину гипотенузы AB и перпендикулярная ей. 4. $\frac{ab}{a+b}$. 5. а) Прямая, проходящая через B параллельно l ; б) две прямые, параллельные l , на расстояниях 12 и $\frac{8}{3}$ от l , лежащие с той же стороны, что A и B ; в) две прямые, параллельные l , удаленные на расстояния $\frac{4}{3}$ и 6 и лежащие по разные стороны от l . 6. $\frac{\sqrt{2}}{10}$. 7. 6 или 4 . 11. Отрезок M_1M_2 , M_1M_2 проходит через O , перпендикулярен биссектрисе $\angle BOA$, $M_1O = M_2O = \sqrt{2}$. 14. Искомое геометрическое место состоит из двух перпендикулярных прямых, проходящих через центр квадрата. 15. Искомое геометрическое место состоит из четырех точек. 19. Искомое геометрическое место есть отрезок, соединяющий середины диагоналей данного четырехугольника.

12.1 1. Нет. 3. Таких движений 8. 4. $\left(-\frac{17}{5}; \frac{26}{5}\right)$ или $\left(-\frac{17}{5}; \frac{4}{5}\right)$. 5. Прямые AB и $A'B'$ перпендикулярны.

12.2 1. а) $(4; -2)$; б) $(-3; 6)$; в) $(2; 8)$. 2. а) $2x - 3y = 38$; б) $3x + 4y = 8$. 3. $\left(-\frac{25}{18}; \frac{11}{6}\right)$. 4. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. 5. а) 6 ; б) 18 ; в) 180 . 6. Центром поворота будет точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA' и BB' . 8. Искомое геометрическое место состоит из двух прямых, в которые переходит прямая l при повороте вокруг A на угол 60° в одну и противоположную сторону. 9. Шесть симметрий и шесть вращений.

12.3 2. Если отрезки не равны, то таких гомотетий две. 6. Середина AB описывает окружность, гомотетичную данной с центром в A и коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Дополнительные задачи

1. $\frac{\sqrt{2}-1}{2} (a+b-\sqrt{a^2+b^2})$. 2. 30° . 3. $l\sqrt{a(2l-a)}$. 4. $\frac{1}{2}(S_1+S_2)$.
5. $\frac{1-k}{1+k}$. 6. $\frac{a+b}{4}$. 7. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2}}$. 8. $(6-\pi):2\pi:(6-\pi)$. 9. $\frac{a^2}{28}(\pi+2\sqrt{3}-6)$.
10. $\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 11. $\frac{d}{3}$. 12. $\frac{4}{9}S$. 13. $a+b+c$. 14. $\frac{9}{25}R^2$. 15. $\sqrt{\frac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$.
16. $\frac{a(4\sin^2\alpha+1)}{8\sin\alpha}$. 17. $\frac{a^2+4r^2}{4r}$. 18. $\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4b}$. 19. $\frac{a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin(\alpha+\beta)}$. 20. $\frac{R^2-a^2}{2R}$.
21. $\frac{a\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$. 22. $a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)$. 23. $P+Q+\frac{Q^2}{4P}$. 24. $2(R^3+a^3)$. 25. $\frac{br}{c}$. 26. $\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$.
27. $a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. 28. $\frac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{2(b-acos\alpha)}$. 29. 1. 30. $\frac{2}{\pi}$. 31. $a^2(\sqrt{2}-1)$.
32. $\frac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{4\sqrt{4S_1^2-S_2^2}}$. 33. $\sqrt{a^2+b^2-ab}$, $\sqrt{a^2+b^2+ab}$.
34. $\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$. 35. $\frac{2Rr}{R+r}$. 36. $R+r$. 37. $2\sqrt{113-56\sqrt{3}}$. 38. $7\frac{1}{2}$. 39. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
40. 60° . 41. $2\frac{2}{3}$. 42. $\frac{5-\sqrt{5}}{8}$. 43. $\frac{ar}{a+2r}$. 44. 6. 45. $\sqrt{R^2+r^2-a^2}$. 46. 75° .
47. $\frac{9}{\sqrt{7}}$. 48. 45° , 1:1. 49. 15° . 50. $a+b+c$. 51. Окружность с диаметром AD , где D — точка прямой AB , для которой A — середина DB . (Точки A и D исключаются.)
52. Нет, не может. 54. Можно. 56. 75° . 57. 75° . 61. $90^\circ-2\alpha$. 62. 12. 64. 7. 65. $\frac{a}{m}R$.
66. Пусть K — середина хорды AB , E и F — середины двух дуг с концами в A и B . Искомое геометрическое место состоит из четырех дуг четырех окружностей. Диаметрами окружностей являются отрезки AE , AF , BE , BF . В этих окружностях берутся дуги EK и FK , лежащие внутри данной окружности. 68. $\sqrt{5}$.
70. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 71. 60° . 72. $\sqrt{2}$. 73. $\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}}$. 74. $\frac{a}{2}$. 75. $2\sqrt{\frac{7}{3}}$. 76. $\sqrt{\frac{3}{7}}$. 77. k^3 .
78. $\frac{d}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$. 80. $2a(1\pm\cos\alpha)$. 81. $a-b$. 82. $|a-b|$.

Оглавление

.....

Седьмой класс

1. Чем занимается геометрия?

Первые понятия геометрии	6
1.1. Геометрическое тело	7
1.2. Поверхность	11
1.3. Линия ..	15
1.4. Точка	17
1.5. От точки к телу	18

2. Основные свойства плоскости

2.1. Геометрия прямой линии	23
2.2. Основные свойства прямой на плоскости	30
2.3. Плоские углы	35
2.4. Плоские кривые, многоугольники, окружность	43

3. Треугольник и окружность. Начальные сведения

3.1. Равнобедренный треугольник	52
3.2. Признаки равенства треугольников	57
3.3. Неравенства в треугольнике. Касание окружности с прямой и окружностью	67

4. Виды геометрических задач и методы их решения . . .

4.1. Геометрические места точек	76
4.2. Задачи на построение	79
4.3. Кратчайшие пути на плоскости	86
4.4. О решении геометрических задач	87
4.5. Доказательства в геометрии	93

Восьмой класс

5. Параллельные прямые и углы

5.1. Параллельные прямые на плоскости	109
5.2. Измерение углов, связанных с окружностью	117
5.3. Задачи на построение и геометрические места точек	124
5.4. Метод вспомогательной окружности. Задачи на вычисление и доказательство	131

6. Подобие

6.1. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат	139
6.2. Теорема Фалеса и следствия из нее	146
6.3. Подобные треугольники. Признаки подобия треугольников	154

7. Метрические соотношения в треугольнике и окружности	165
7.1. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора	166
7.2. Тригонометрические функции. Теоремы косинусов и синусов	173
7.3. Соотношения между отрезками, возникающими при пересечении прямых с окружностью	184
8. Задачи и теоремы геометрии	188
8.1. Замечательные точки треугольника	189
8.2. Некоторые теоремы и задачи геометрии. Метод подобия	198
8.3. Построение отрезка по формуле. Метод подобия в задачах на построение	205
* 8.4. Одно важное геометрическое место точек	210
8.5. Вписанные и описанные четырехугольники	213
* 8.6. Вычислительные методы в геометрии, или Об одной задаче Архимеда	221
Задачи для повторения	228

Девятый класс

9. Площади многоугольников	236
9.1. Основные свойства площади. Площадь прямоугольника	237
9.2. Площади треугольника и четырехугольника	243
9.3. Площади в теоремах и задачах	256
10. Длина окружности, площадь круга	267
10.1. Правильные многоугольники	268
10.2. Длина окружности	273
* 10.3. Длина окружности (продолжение)	282
10.4. Площадь круга и его частей	287
11. Координаты и векторы	290
11.1. Декартовы координаты на плоскости	291
11.2. Уравнение линии	293
11.3. Векторы на плоскости	299
11.4. Скалярное произведение векторов	305
11.5. Координатный и векторный методы	310
12. Преобразования плоскости	321
12.1. Движение плоскости	322
12.2. Виды движений плоскости	326
12.3. Гомотетия	332
Дополнительные задачи	335
Ответы и указания	343



Д Р О Ф А